ISSN 2518-1726 (Online),
ISSN 1991-346X (Print)

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
ҰЛТТЫҚ ҒЫЛЫМ АКАДЕМИЯСЫНЫҢ
әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университетінің

Х А Б А Р Л А Р Ы

ИЗВЕСТИЯ

НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН
Казахский национальный университет
им. аль-Фараби

N E W S

OF THE NATIONAL ACADEMY OFSCIENCES
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
Al-Farabi Kazakh
National University

SERIES
PHYSICO-MATHEMATICAL

1(329)

JANUARY – FEBRUARY 2020

PUBLISHED SINCE JANUARY 1963

PUBLISHED 6 TIMES A YEAR

ALMATY, NAS RK

«ҚР ҰҒА Хабарлары. Физика-математикалық сериясы».
ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346Х (Print)
Меншіктенуші: «Қазақстан Республикасының Ұлттық ғылым академиясы» РҚБ (Алматы қ.)
Қазақстан республикасының Мәдениет пен ақпарат министрлігінің Ақпарат және мұрағат комитетінде 01.06.2006 ж. берілген **№5543-Ж** мерзімдік басылым тіркеуіне қойылу туралы куәлік

Мерзімділігі: жылына 6 рет.
Тиражы: 300 дана.

Редакцияның мекенжайы: 050010, Алматы қ., Шевченко көш., 28; 219, 220 бөл.; тел.: 272-13-19; 272-13-18, http://physics-mathematics.kz/index.php/en/archive

Типографияның мекенжайы: «NurNaz GRACE», Алматы қ., Рысқұлов көш., 103.

«Известия НАН РК. Серия физика-математическая».
ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)
Собственник:РОО «Национальная академия наук Республики Казахстан» (г. Алматы)
Свидетельство о постановке на учет периодического печатного издания в Комитете информации и архивов Министерства культуры и информации Республики Казахстан **№5543-Ж**, выданное 01.06.2006 г.

Периодичность: 6 раз в год.
Тираж: 300 экземпляров.

Адрес редакции: 050010, г. Алматы, ул. Шевченко, 28; ком. 219, 220; тел.: 272-13-19; 272-13-18,
http://physics-mathematics.kz/index.php/en/archive

Адрес типографии: «NurNaz GRACE», г. Алматы, ул. Рыскулова, 103.

News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Physical-mathematical series.
ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)
Owner: RPA "National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan" (Almaty)
The certificate of registration of a periodic printed publication in the Committee of information and archives of the Ministry of culture and information of the Republic of Kazakhstan N 5543-Ж, issued 01.06.2006

Periodicity: 6 times a year.
Circulation: 300 copies.

Editorial address: 28, Shevchenko str., of. 219, 220, Almaty, 050010, tel. 272-13-19; 272-13-18,
http://physics-mathematics.kz/index.php/en/archive

Address of printing house: «NurNaz GRACE», 103, Ryskulov str, Almaty.

NEWS
OF THENATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X **https://doi.org/10.32014/2020.2518-1726.7**
Volume 1, Number 329 (2020), 55 – 61

UDC 521.112/.116, IRSTI 41.03.21, 30.15.02

E.A. Malkov[1], A.A. Bekov[2,3], S.B. Momynov[2,3], I.B. Beckmuhamedov[2], D.M. Kurmangaliyev[2], A.M.Mukametzhan[2] , I.S.Orynqul[4]

[1]Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia;
[2]Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan;
[3]Satbayev University, Almaty, Kazakhstan;
[4]MSOE «Almaty College of Fashion and Design», Almaty, Kazakhstan
bekov@mail.ru, momynov_serzhan@mail.ru

INVESTIGATION OF TWO FIXED CENTERS PROBLEM AND HENON-HEILES POTENTIAL BASED ON THE POINCARE SECTION

Abstract. In this paper, we study the Henon-Heiles potential and the problem of two fixed centers. In studies of nonlinear systems for which exact solutions are unknown, the Poincare section method is used. For the Henon-Heiles potential, Poincare sections were obtained. Next, the potential of two fixed centers was investigated. It was shown on the basis of the Poincare section that, in the case $\mu_1 = \mu_2 = 1$ the internal cross-sectional structure decomposes from the values $H = -1.7$, but the internal cross-sectional structure is preserved in the interval $H \in [-0.5, -1.6]$, in the case $\mu_1 = 0.9$ and $\mu_2 = 0.1$ the internal cross-sectional structure decomposes from the values $H = -0.9$ but the internal cross-sectional structure is preserved in the interval $H \in [-0.3, -0.8]$, in the case of $\mu_1 = 0.7$ and $\mu_2 = 0.3$ the internal cross-sectional structure decomposes from the values $H = -0.8$, but the internal cross-sectional structure is preserved in the interval $H \in [-0.2, -0.7]$. With increasing energy, many of these surfaces decay. It is assumed that the numerical results obtained will serve as the basis for comparison with analytical solutions.

Keywords: Henon-Heiles model, the problem of two fixed centers, Poincaré section, numerical solutions.

Introduction. Interest in the existence of the third integral of motion for stars moving in the potential of the galaxy revived in the late 50's and early 60's of the last century. Initially it was assumed that the potential has a symmetry and does not depend on time, therefore in cylindrical coordinates (r, θ, z) this will be only a function of r and z. There must be five integrals of motion that are constant for the six-dimensional phase space. However, the integrals can be either isolating or non-isolating. Non-isolating integrals usually fill all available phase spaces and do not restrict the orbit.

Henon and Heiles tried to find out if they could find any real proof that there must be a third isolating integral of the motion. Making numerical calculations, they did not complicate the astronomical meaning of the problem; they only demanded that the potential investigated by them be axially symmetric. The authors also suggested that the motion was tied to a plane and passed into the Cartesian phase space ($x, y, \dot{x}, \dot{y}$). After some tests they managed to find a real potential. This potential is analytically simple, so that the orbits can be calculated quite easily, but it is still quite complex, so that the types of orbits are nontrivial. This potential is now known as the potential of Henon and Heiles [1-3].

Some particular solutions to the three-body problem are known, but a general solution has not yet been found. One of the special cases of the three-body problem is the problem of two fixed centers. It was first considered by Euler in 1760 [4]. Jacobi showed that the equations of motion can be integrated in terms of elliptic functions [5]. This problem can be used as some first approximation in astronomical problems about the motion of minor planets and comets under the influence of gravity of the Sun and Jupiter. The period of revolution of Jupiter is about twelve years, and for a short period of time the motion of these celestial bodies can be considered in the framework of the problem of two fixed centers. Also, the problem of the motion of a spacecraft to the Moon can be considered within the framework of this task. The flight time of the spacecraft to the Moon is about four days. During this time, the Moon will move slightly in a circular orbit of the Earth. The study of the problem of two fixed centers was carried out in different directions [6-22]. For example, V.V. Kozlov and A.O. Harin considered a modification of the problem of two fixed centers on a sphere [23].

Methods and calculations. The Henon-Heiles potential is undoubtedly one of the simplest, classical and characteristic examples of open Hamiltonian systems with two degrees of freedom. The above topic was devoted to a large number of research scientists [24-26].

The potential of the Henon-Heiles system is determined by the formula:

$$U(x,y)=\frac{1}{2}(x^2+y^2+2x^2y-\frac{2}{3}y^3) \tag{1}$$

Equation (1) shows that the potential actually consists of two harmonic oscillators, which were connected by the perturbing terms $x^2y-\frac{1}{3}y^3$.

The basic equations of motion for a test particle with a unit mass $(m=1)$ are:

$$\begin{cases} \ddot{x}=-\dfrac{\partial U}{\partial x}=-x-2xy \\ \ddot{y}=-\dfrac{\partial U}{\partial y}=-y-x^2+y^2 \end{cases} \tag{2}$$

Consequently, the Hamiltonian of system (1) has the form:

$$H=\frac{1}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)+\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)+x^2y-\frac{1}{3}y^3=h, \tag{3}$$

where $\dot{x}$and $\dot{y}$ are the momenta per unit mass, x and y are the coordinates of the system; $h>0$the numerical value of the Hamiltonian, which is conserved. It is seen that $h>0$the Hamiltonian is symmetric with respect to $x \to -x$, and H also exhibits a symmetry of rotation at $2\pi / 3$.

Below are the dependencies of the coordinates of the functions in time for the systems of equations (2).

To study the Henon-Heiles system, the Poincaré section method is used. Advantages of this method are especially evident when we consider nonlinear systems for which exact solutions are unknown. In this case, the phase trajectories are calculated by numerical methods.

To solve the systems of equations (2), boundary conditions are chosen so that they satisfy equation (3). Further, the systems of equation (2) are solved on the basis of the Runge-Kutta method. To construct the Poincaré section, those values that intersect the plane $x=0$ are chosen. Below are the Poincaré sections for Henon-Heiles systems for different energy values: $E=1/12$, $E=1/8$. With increasing energy, the structure of the cross sections is destroyed. The results obtained are in agreement with other authors [1, 2].

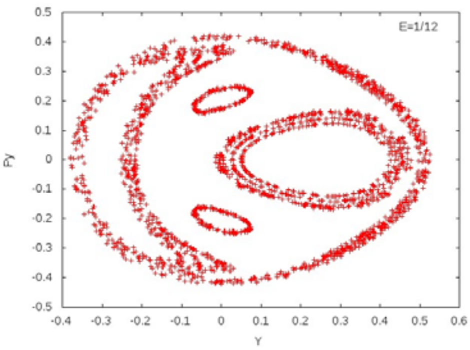

Figure 1 - Poincare section at $E=1/12$

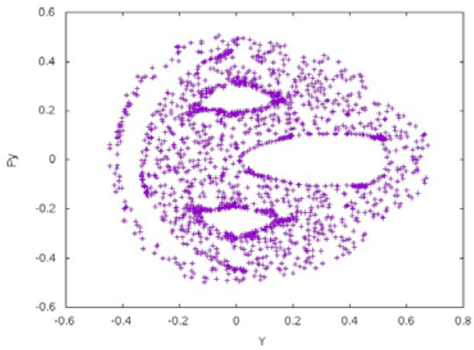

Figure 2 - Poincare section at $E=1/8$

Next, we study the problem of two fixed centers. Imagine that on the OXY plane there are two fixed points S1 and S2 with masses m1 and m2 under the influence of Newtonian attraction of which the material point S of mass m moves in the same plane. Thus, the equations of motion of a material point can be written in the following form [27]:

$$\begin{cases} \ddot{x} = \dfrac{\partial U}{\partial x} = -fm_1 \dfrac{x}{r_1^3} - fm_2 \dfrac{x}{r_2^3}, \\ \ddot{y} = \dfrac{\partial U}{\partial y} = -fm_1 \dfrac{y-c}{r_1^3} - fm_2 \dfrac{y+c}{r_2^3}, \end{cases} \tag{4}$$

Where $U = f(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2})$, f is gravitational constant.

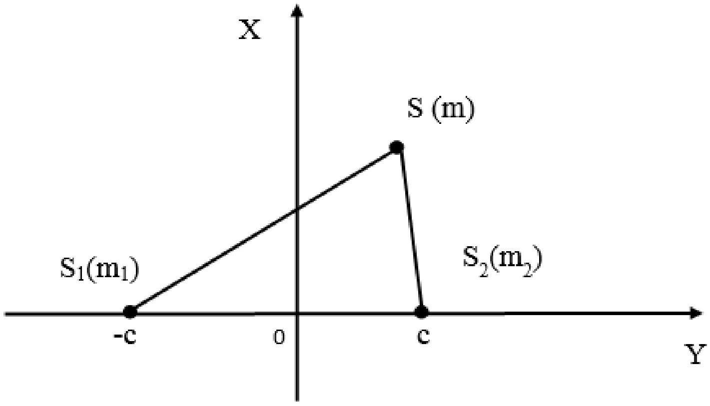

Figure 3 - Scheme of the task

Radius vectors are defined as follows:

$$r_1 = \sqrt{x^2 + (y-c)^2}\ ,\ r_2 = \sqrt{x^2 + (y+c)^2} \tag{5}$$

The canonical equations of the problem of two fixed centers will have the form [28]:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = +\dfrac{\partial H}{\partial \dot{x}}, & \dfrac{dx}{dt} = +\dfrac{\partial H}{\partial \dot{y}} \\ \dfrac{d\dot{x}}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial x}, & \dfrac{d\dot{y}}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial y} \end{cases} \tag{6}$$

where the Hamiltonian is defined by the formula

$$H = T - U = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - f(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2})\ ,\ H = const \tag{7}$$

We introduce the following notation: $\mu_1 = fm_1$, $\mu_2 = fm_2$. Consider the case $\mu_1 = \mu_2 = 1$, the second case $\mu_1 = 0.9$ and $\mu_2 = 0.1$, the third case $\mu_1 = 0.7$ and $\mu_2 = 0.3$. These parameters show different mass ratios of fixed centers. Now we study the Poincare section for the indicated model of the problem and parameters. Based on the results obtained, we can say that, in the case $\mu_1 = \mu_2 = 1$ the internal cross-sectional structure decomposes from the values $H = -1.7$, but the internal cross-sectional structure is preserved in the interval $H \in [-0.5, -1.6]$, in the case $\mu_1 = 0.9$ and $\mu_2 = 0.1$ the internal cross-sectional structure decomposes from the values $H = -0.9$, but the internal cross-sectional structure is preserved in the interval $H \in [-0.3, -0.8]$, in the case of $\mu_1 = 0.7$ and $\mu_2 = 0.3$ the internal cross-sectional structure decomposes from the values $H = -0.8$, but the internal cross-sectional structure is preserved in the interval $H \in [-0.2, -0.7]$.

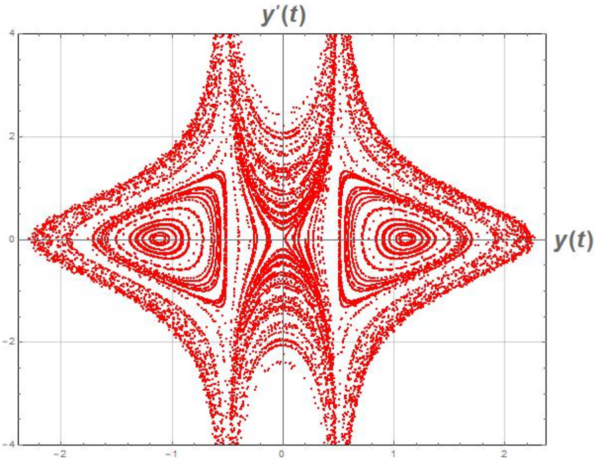

Figure 4 – Poincare section at $H=-0.9$, $c=0.5$, $\mu_1=1.0$, $\mu_2=1.0$

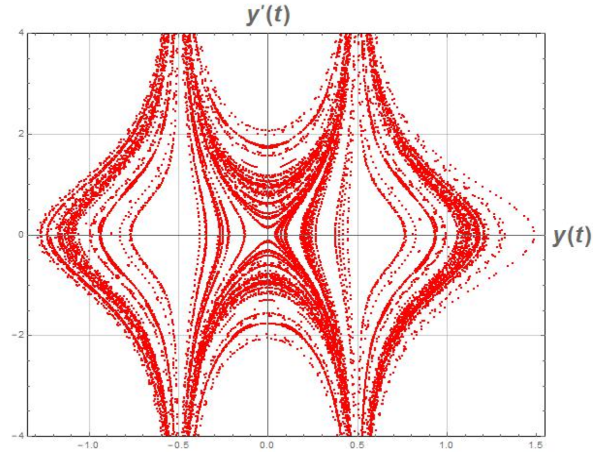

Figure 5 – Poincare section at $H=-1.7$, $c=0.5$, $\mu_1=1.0$, $\mu_2=1.0$

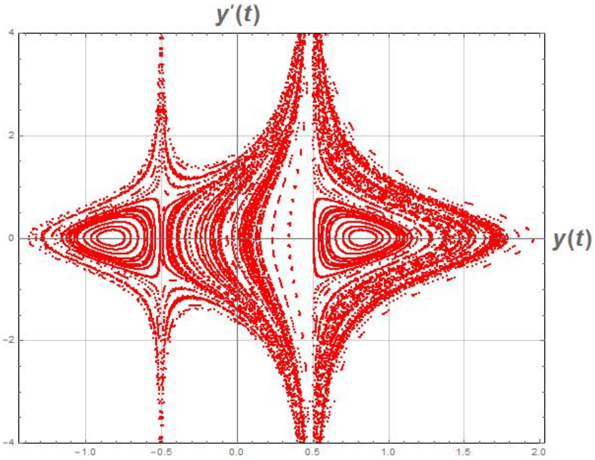

Figure 6 – Poincare section at $H=-0.6$, $c=0.5$, $\mu_1=0.9$, $\mu_2=0.1$

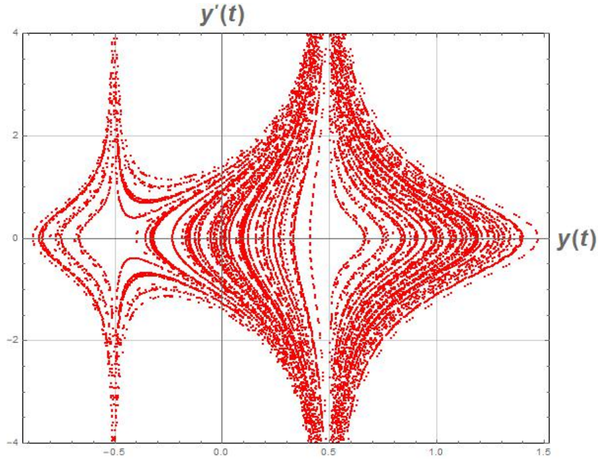

Figure 7 – Poincare section at $H=-0.9$, $c=0.5$, $\mu_1=0.9$, $\mu_2=0.1$

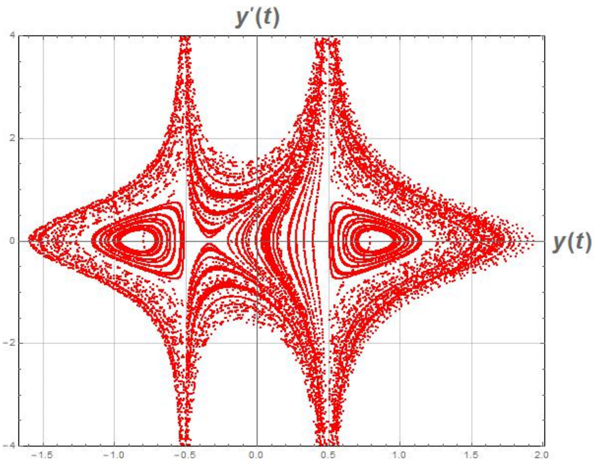

Figure 8 – Poincare section at $H=-0.6$, $c=0.5$, $\mu_1=0.7$, $\mu_2=0.3$

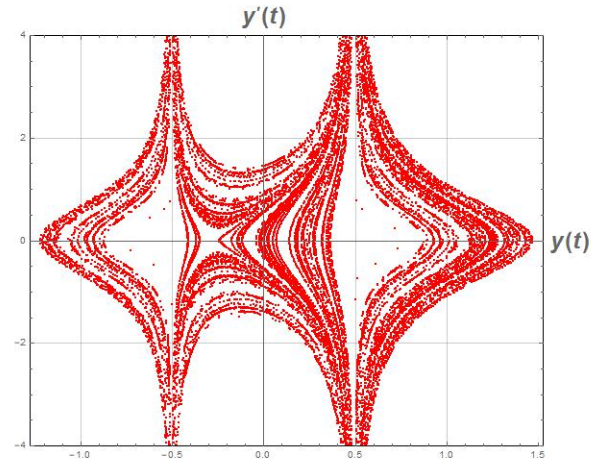

Figure 9 – Poincare section at $H=-0.8$, $c=0.5$, $\mu_1=0.7$, $\mu_2=0.3$

Conclusion. Thus, the results obtained by the numerical method determine the structure of the Poincare sections for the model of the problem of two fixed centers and serve as the basis for comparative analysis in determining the analytical mapping.

Е.А. Малков[1], А.А. Беков[2,3], С.Б. Момынов[2,3], И.Б. Бекмухамедов[2], Д.М. Курмангалиев[2], А.М.Мұқаметжан[2] , И.С. Орынқұл[4]

[1] С.А. Христианович атындағы Теоретикалық және Қолданбалы Механика Институты, Ресей Ғылым Академиясы, Сібір Бөлімі, Алматы, Қазақстан;
[2]Әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық Университеті, Алматы, Қазақстан;
[3] Қ.И. Сәтбаев атындағы Қазақ Ұлттық Техникалық Зерттеу Университеті, Алматы, Қазақстан
КМҚК «Алматы сән және дизайн колледжі» Алматы, Қазақстан

ПУАНКАРЕ ҚИМАСЫНЫҢ НЕГІЗІНДЕ ҚОЗҒАЛМАЙТЫН ЕКІ ЦЕНТР ЕСЕБІ МЕН ХЕНОН-ХЕЙЛЕС ПОТЕНЦИАЛЫН ЗЕРТТЕУ

Аннотация. Өткен ғасырдың 50-жылдарының аяғы мен 60-жылдарының басында галактика потенциалында қозғалатын жұлдыздар үшін үшінші интегралына қызығушылық туындай бастады. Бастапқыда потенциал симметриалы және уақытқа тәуелсіз деп қарастырылды, сондықтан цилиндрлік координатада (r, θ, z) функция тек r мен z-қа ғана тәуелді болады. Алты өлшемді фазалық кеңістікте тұрақты бес қозғалыс интергалы болуы керек. Бірақ, интегралдар шектелген немесе шектелмеген болуы қажет. Әдетте, шектелмеген интегралдар барлық фазалық кеңістікті толтырады және орбитаны шектемейді.

Хенон мен Хейлес үшінші шектелген қозғалыс интегралының бар екендігіне нақты дәлелдер табуға тырысты. Сандық есептеулер жүргізе отыра, олар бұл проблеманың астрономиялық мағынасын жеңілдетуге тырысты; олар зерттеліп отырған потенциалдың аксиальді-симметриялы болуын талап етті. Сонымен қатар авторлар, бұл қозғалыс жазықтыққа тәуелді және декарттық фазалық жазықтықта (x, y, $\dot{x}, \dot{y}$) жатады деп тапты. Бірнеше тәжірибелерден кейін, нақты потенциалды таба алды. Бұл потенциал аналитикалық тұрғыдан қарапайым, сондықтан орбиталарды анықтауға болады, сонымен қатар потенциал жеткілікті түрде қиын, сондықтан орбиталар тривиалды емес түрге жатады. Қазіргі таңда бұл потенциал Хенон-Хейлос потенциалы деп аталады.

Үш дене есебінің кейбір дербес шешімдері анықталған, бірақ толық шешімі жоқ. Үш дене есебінің дербес шешімдерінің бірі – қозғалмайтын екі центр есебі. Бұл есепті алғаш рет 1760 жылы Л. Эйлер қарастырды. Ал Якоби болса, қозғалыс теңдеулері эллиптикалық функциялар терминдерінде интегралданатынын көрсетті. Берілген есеп кейбір кіші планеталар мен кометалардың Күн және Юпитер гравитациясындағы қозғалысы жайлы астрономиялық есептерде бірінші жуықтауда қолданылады. Юпитердің Күнді айналу периоды 12 жылға жуық және осы уақыт аралығында кометалар мен кіші планеталардың қозғалысын қозғалмайтын екі центр есебі ретінде алуға болады. Берілген есепте, ғарыш кемесінің Айға ұшу қозғалысын қарастыруға болады. Ғарыштық кеменің Айға ұшу уақыты – 4 тәулікке жуық. Олай болса, осы уақытта Ай Жердің орбитасында кішкене ғана қозғалады. Қозғалмайтын екі центр есебі бірнеше бағытта зерттелген болатын.

Берілген мақалада Хенон-Хейлес потенциалы мен қозғалмайтын екі центр есебі қарастырылады. Сызықты емес жүйелердің нақты шешімдері белгісіз болғанда, Пуанкаре қима әдісі қолданылады. Хенон-Хейлес потенциалы үшін Пуанкаре қимасы алынды. Сонымен қатар қозғалмайтын екі центр есебі зерттелді. Пуанкаре қимасының негізінде қозғалмайтын екі центр есебіне келесідей тұжырымдамалар алынды: $\mu_1 = \mu_2 = 1$ кезінде $H = -1.7$ мәнінен бастап ішкі қима ыдырайды, ал $H \in [-0.5, -1.6]$ аралығында ішкі қима сақталады; $\mu_1 = 0.9$ және $\mu_2 = 0.1$ кезінде $H = -0.9$ мәнінен бастап ішкі қима ыдырайды, ал $H \in [-0.3, -0.8]$ аралығында ішкі қима сақталады; $\mu_1 = 0.7$ және $\mu_2 = 0.3$ кезінде $H = -0.8$ мәнінен бастап ішкі қима ыдырайды, ал $H \in [-0.2, -0.7]$ аралығында ішкі қима сақталады. Сонымен қатар, энергияның өсуімен, осы қималардың көпшілігі ыдырайды. Алынған сандық нәтижелер аналитикалық шешімдермен салыстыру үшін негіз болады деп болжануда.

Түйін сөздер: Хенон-Хейлес моделі, қозғалмайтын екі центр есебі, Пуанкаре қимасы, сандық шешімдер.

Е.А. Малков[1], А.А. Беков[2,3], С.Б. Момынов[2,3], И.Б. Бекмухамедов[2], Д.М. Курмангалиев[2], А.М.Мӯќаметжан[2] , И.С. Орынќӯл[4]

[1]Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, РФ;
[2]Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан;
[3]Казахский национальный исследовательский технический университет им. К.И. Сатпаева, Алматы, Казахстан, КГКП «Алматинский колледж моды и дизайна», Алматы, Казахстан

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ ДВУХ НЕПОДВИЖНЫХ ЦЕНТРОВ И ПОТЕНЦИАЛА ХЕНОНА-ХЕЙЛЕСА НА ОСНОВЕ СЕЧЕНИЯ ПУАНКАРЕ

Аннотация. Интерес к существованию третьего интеграла движения для звезд, движущихся в потенциале галактики, возродился еще в конце 50-х и начале 60-х годов прошлого столетия. Первоначально предполагалось, что потенциал имеет симметрию и не зависит от времени, поэтому в цилиндрических координатах (r, θ, z) это будет только функция от r и z. Должны существовать пять интегралов движения, постоянных для шестимерного фазового пространства. Однако интегралы могут быть либо изолирующими, либо неизолирующими. Неизолирующие интегралы обычно заполняют все доступные фазовые пространства и не ограничивают орбиту.

Хенон и Хейлес попытались выяснить, могут ли они найти какое-либо реальное доказательство того, что должен существовать третий изолирующий интеграл движения. Проводя численные вычисления, они не слишком усложняли астрономический смысл проблемы; они требовали только, чтобы исследованный ими потенциал был аксиально-симметричным. Авторы также предположили, что движение привязано к плоскости и перешли в декартово фазовое пространство $(x, y, \dot{x}, \dot{y})$. После некоторых испытаний им удалось найти действительный потенциал. Этот потенциал аналитически прост, так что орбиты можно вычислить довольно легко, но он все еще достаточно сложный, так что типы орбит нетривиальны. Этот потенциал теперь известен как потенциал Хенона и Хейлеса.

Известны некоторые частные решения задачи трех тел, но общее решение еще не найдено. Одним из частных случаев задачи трех тел является задача двух неподвижных центров. Она была впервые рассмотрена Эйлером 1760 г. Якоби показал, что уравнения движения могут быть интегрированы в терминах эллиптических функций. Данная задача может быть использована как некоторое первое приближение в астрономических задачах о движении малых планет и комет под действием гравитации Солнца и Юпитера. Период обращения Юпитера составляет около двенадцати лет, и в течение небольшого промежутка времени движение указанных небесных тел можно рассматривать в рамках задачи двух неподвижных центров. Также задачу о движении космического корабля к Луне можно рассматривать в рамках указанной задачи. Время полета космического корабля до Луны составляет около четырех суток. За это время Луна по круговой орбите Земли переместится незначительно. Исследование задачи двух неподвижных центров проводилось различных направлениях.

В данной работе исследуется потенциал Хенона-Хейлеса и задача двух неподвижных центров. При исследовании нелинейных систем, для которых неизвестны точные решения используется метод сечения Пуанкаре. Для потенциала Хенона-Хейлеса были получены сечения Пуанкаре. Далее был исследован потенциал задачи двух неподвижных центров. Было показано на основе сечения Пуанкаре, что в случае $\mu_1 = \mu_2 = 1$ внутренняя структура сечений распадается со значений $H = -1.7$, но внутренняя структура сечений сохраняется в отрезке $H \in [-0.5, -1.6]$, в случае $\mu_1 = 0.9$ и $\mu_2 = 0.1$ внутренняя структура сечений распадается со значений $H = -0.9$, но внутренняя структура сечений сохраняется в отрезке $H \in [-0.3, -0.8]$, в случае $\mu_1 = 0.7$ и $\mu_2 = 0.3$ внутренняя структура сечений распадается со значений $H = -0.8$, но внутренняя структура сечений сохраняется в отрезке $H \in [-0.2, -0.7]$. С увеличением энергии многие из этих поверхностей распадаются. Предполагается, что полученные численные результаты послужат основой для сравнения с аналитическими решениями.

Ключевые слова: модель Хенона-Хейлеса, задача двух неподвижных центров, сечение Пуанкаре, численные решения.

Information about the authors:

Malkov Ewgenii – Doctor of physical and mathematical sciences, Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics Siberian Branch of Russian Academy of Sciences;

Bekov Askar – Doctor of physical and mathematical sciences, professor, Al-Farabi Kazakh National University, Satbayev University; https://orcid.org/0000-0002-6836-1369;

Momynov Serzhan – senior lecturer, Al-Farabi Kazakh National University, Satbayev University; https://orcid.org/0000-0003-2332-8212;

Beckmuhamedov Ilias. – PhD student, Al-Farabi Kazakh National University;

Kurmangaliev Duman – master student, Al-Farabi Kazakh National University;
Mukametzhan Aidana – master student, Al-Farabi Kazakh National University;
Orynqul Iltefat – teacher, MSOE «Almaty College of Fashion and Design».

REFERENCES

[1] Lichtenberg A., Lieberman M. Regular and stochastic dynamics [Reguljarnaja i stohasticheskaja dinamika]. M: Mir, 1985- 529p. (In Russian).

[2] Euaggelos E. Zotos. Classifying orbits in the classical Henon-Heiles Hamiltoninan system. arXiv:1502.02510v1 [nlin.CD] 9 Feb 2015.

[3] Vernov S. Ju., Construction of solutions of the generalized Henon-Heiles system using the Painleve test [Postroenie reshenij obobshhennoj sistemy Henona–Hejlesa s pomoshh'ju testa Penleve]. TMF, 2003, Vol. 135, No. 3, 409-419. (In Russian).

[4] Euler L. Historie de L'Academie Royale des sciences et Belles-lettres, (1760), 1767,Vol. XVI. Pp. 228–247.

[5] Jacobi C. G. J. Vorlesungen uber Dynamik. Chelsea Publ., New York, 1969.

[6] Gonzalez Leon M.A., Mateos Guilatre J., de la Torre Mayado M., Orbits in the problem of two fixed centers on the sphere. Regular and Chaotic Dynamics,2017 Vol. 22, No. 5, pp. 520-542. DOI: 10.1134/S1560354717050045.

[7] Borisov A.V. and Mamaev I.S. Generalized problem of two and four Newtonian centers. Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy (2005) 92:371-380.DOI: 10.1007/s10569-005-1557-y.

[8] Borisov A.V. and Mamaev I.S. Relations between integrable systems in plane and curved spaces. Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy (2007) 99:253-260. DOI: 10.1007/s10569-007-9098-1.

[9] Seri M. The problem of two fixed centers: bifurcation diagram for positive energies. Journal of Mathematical Physics 56, 012902 (2015). DOI: 10.1063/1.4906068.

[10] Vozmicheva T.G. Classification of motions for generalization of the two centers problem on sphere. Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy **77:** 37–48, 2000.

[11] Vozmicheva T.G, Oshemkov A. A. Topological analysis of the two-centre problem on the two-dimensional sphere, Mat. Sb., 2002, Volume 193, Number 8, 3–38. DOI: https://doi.org/10.4213/sm672.

[2] Albouy A. The underlying geometry of the fixed centers problems, in Topological Methods, Variational Methods and Their Applications, Brezis, H., Chang, K.C., Li, S.J., Rabinowitz, P. (Eds.), Singapore: World Scientific, 2003, pp. 11-21.

[13] Albouy A. and Stuchi T. Generalizing the classical fixed-centres problem in a non-Hamiltonian way, J. Phys. A, 2004, vol. 37, pp. 9109-9123.

[14] Waalkens H., R. Dullin H., and H. Richter P. The Problem of two fixed centers: Bifurcations, Actions, Monodromy. Physica D 196 (2004) 265-310 DOI: 10.1016/j.physd.2004.05.006. ·

[15] Demin V.G. Orbits in the problem of two fixed centers. Astronomicheskii Zhurnal, Vol. 37, pp. 1068-1075,1960.

[16] O Mathuna, D. Integrable Systems in Celestial Mechanics, Boston: Birkhauser, 2008.

[17] Arathoon Ph. Singular reduction of the 2-body problem on the 3-sphere and the 4-dimensional spinning top. Regular and Chaotic Dynamics, 2019, Vol. 24, No. 4, pp. 370-391. DOI: 10.1134/S1560354719040026.

[18] Borisov A.V., Mamaev I.S. and Bizyaev I.A., The Spatial Problem of 2 Bodies on a Sphere. Reduction and Stochasticity, Regul. Chaotic Dyn., 2016, vol. 21(5), pp. 556-580. DOI: 10.1134/S1560354716050075.

[19] Borisov A.V., Mamaev I.S. The restricted two-body problem in constant curvature spaces. Celestial Mech Dyn Astr (2006) 96:1–17. DOI 10.1007/s10569-006-9012-2.

[20] Garcia-Naranjo L.C., Marrero J.C., Perez-Chavela E. and Rodriguez-Olmos M. Classification and stability of relative Equilibria for the two-body problem in the hyperbolic space of Dimension 2. J. Differential Equations, 2016, vol. 260, no. 7, pp. 6375–6404.

[21] Tremblay F., Turbiner A.V., and Winternitz P. Periodic orbits for an infinite family of classical superintegrable systems, J. Phys. A, 2010, vol. 43, no. 1, 015202, 14 pp.

[22] Shinibaev M.D., Dairbekov S.S., Zholdasov S.A., Myrzakasova G.E., Aliaskarov D.R., Shekerbekova S.A., Sadybek A.G. Use of the new version of the problem of two centers in the three-body problem. News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan, physico-mathematical series, 2017, Vol. 1, No. 311, pp. 127-136. (In Russian)

[23] Kozlov V.V. and Harin A.O., Kepler's Problem in Constant Curvature Spaces, Celest. Mech. Dyn. Astr., 1992, vol. 54(4), pp. 393-399.

[24] Omarov Ch. T. and Malkov E. A. Chaotic Behavior of Oscillations of Self-Gravitating Spheroid Order and Chaos in Stellar and Planetary Systems ASP Conference Series, Vol. 316, 2004.

[25] Euaggelos E. Zotos, A. Riaño-Doncel, F. L. Dubeibe Basins of convergence of equilibrium points in the generalized Henon-Heiles system arXiv:1803.07398v1 [nlin.CD] 20 Mar 2018.

[26] Euaggelos E.Zotos. An overview of the escape dynamics in the Henon-Heiles Hamiltonian system arXiv:1709.04360v2 [nlin.CD] 14 Sep 2017.

[27] Gerasimov I.A., Zhuiko S.V. Investigation of the first integrals of the problem of two fixed centers L. Euler [Issledovanie pervyh integralov zadachi dvuh nepodvizhnyh centrov L. Jejlera], Mathematical modeling and boundary value problems, 2005, part 3, pp. 74–81. (In Russian).

[28] Duboshin G.N. Celestial mechanics [Nebesnaja mehanika]. Basics of the problem and methods [Osnovy zadachi i metody]. M .: Science. Main edition of physical and mathematical literature, 1968, 800 p. (In Russian).

Publication Ethics and Publication Malpractice in the journals of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan

For information on Ethics in publishing and Ethical guidelines for journal publication see **http://www.elsevier.com/publishingethics** and **http://www.elsevier.com/journal-authors/ethics**.

Submission of an article to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan implies that the described work has not been published previously (except in the form of an abstract or as part of a published lecture or academic thesis or as an electronic preprint, see **http://www.elsevier.com/postingpolicy**), that it is not under consideration for publication elsewhere, that its publication is approved by all authors and tacitly or explicitly by the responsible authorities where the work was carried out, and that, if accepted, it will not be published elsewhere in the same form, in English or in any other language, including electronically without the written consent of the copyright-holder. In particular, translations into English of papers already published in another language are not accepted.

No other forms of scientific misconduct are allowed, such as plagiarism, falsification, fraudulent data, incorrect interpretation of other works, incorrect citations, etc. The National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan follows the Code of Conduct of the Committee on Publication Ethics (COPE), and follows the COPE Flowcharts for Resolving Cases of Suspected Misconduct (**http://publicationethics.org/files/u2/New_Code.pdf**). To verify originality, your article may be checked by the Cross Check originality detection service **http://www.elsevier.com/editors/plagdetect**.

The authors are obliged to participate in peer review process and be ready to provide corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. All authors of a paper should have significantly contributed to the research.

The reviewers should provide objective judgments and should point out relevant published works which are not yet cited. Reviewed articles should be treated confidentially. The reviewers will be chosen in such a way that there is no conflict of interests with respect to the research, the authors and/or the research funders.

The editors have complete responsibility and authority to reject or accept a paper, and they will only accept a paper when reasonably certain. They will preserve anonymity of reviewers and promote publication of corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. The acceptance of a paper automatically implies the copyright transfer to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan.

The Editorial Board of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan will monitor and safeguard publishing ethics.

(Правила оформления статьи для публикации в журнале смотреть на сайтах:

www:nauka-nanrk.kz

http://physics-mathematics.kz/index.php/en/archive

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

Редакторы: *М. С. Ахметова, Г. Б. Халидуллаева, Д. С. Аленов*
Верстка на компьютере *А.М. Кульгинбаевой*

Подписано в печать 04.02.2020.
Формат 60x881/8. Бумага офсетная. Печать – ризограф.
4,6 п.л. Тираж 300. Заказ 1.

Национальная академия наук РК
050010, Алматы, ул. Шевченко, 28, т. 272-13-18, 272-13-19