

ISSN 2518-1726 (Online),  
ISSN 1991-346X (Print)

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ  
ҰЛТТЫҚ ҒЫЛЫМ АКАДЕМИЯСЫНЫҢ

# Х А Б А Р Л А Р Ы

---

---

## ИЗВЕСТИЯ

НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК  
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

## NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES  
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

**ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА  
СЕРИЯСЫ**



**СЕРИЯ**

**ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ**



**PHYSICO-MATHEMATICAL  
SERIES**

**6 (316)**

**ҚАРАША – ЖЕЛТОҚСАН 2017 Ж.  
НОЯБРЬ – ДЕКАБРЬ 2017 г.  
NOVEMBER – DECEMBER 2017**

1963 ЖЫЛДЫҢ ҚАҢТАР АЙЫНАН ШЫҒА БАСТАҒАН  
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1963 ГОДА  
PUBLISHED SINCE JANUARY 1963

ЖЫЛЫНА 6 РЕТ ШЫҒАДЫ  
ВЫХОДИТ 6 РАЗ В ГОД  
PUBLISHED 6 TIMES A YEAR

АЛМАТЫ, ҚР ҰҒА  
АЛМАТЫ, НАН РК  
ALMATY, NAS RK

Б а с р е д а к т о р ы  
ф.-м.ғ.д., проф., ҚР ҰҒА академигі **Ғ.М. Мұтанов**

Р е д а к ц и я а л қ а с ы:

**Жұмаділдаев А.С.** проф., академик (Қазақстан)  
**Кальменов Т.Ш.** проф., академик (Қазақстан)  
**Жантаев Ж.Ш.** проф., корр.-мүшесі (Қазақстан)  
**Өмірбаев У.У.** проф. корр.-мүшесі (Қазақстан)  
**Жүсіпов М.А.** проф. (Қазақстан)  
**Жұмабаев Д.С.** проф. (Қазақстан)  
**Асанова А.Т.** проф. (Қазақстан)  
**Бошқаев К.А.** PhD докторы (Қазақстан)  
**Сұраған Д.** корр.-мүшесі (Қазақстан)  
**Quevedo Hernando** проф. (Мексика),  
**Джунушалиев В.Д.** проф. (Қырғыстан)  
**Вишневский И.Н.** проф., академик (Украина)  
**Ковалев А.М.** проф., академик (Украина)  
**Михалевич А.А.** проф., академик (Белорус)  
**Пашаев А.** проф., академик (Әзірбайжан)  
**Такибаев Н.Ж.** проф., академик (Қазақстан), бас ред. орынбасары  
**Тигиняну И.** проф., академик (Молдова)

«ҚР ҰҒА Хабарлары. Физика-математикалық сериясы».

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

Меншіктенуші: «Қазақстан Республикасының Ұлттық ғылым академиясы» РҚБ (Алматы қ.)  
Қазақстан республикасының Мәдениет пен ақпарат министрлігінің Ақпарат және мұрағат комитетінде  
01.06.2006 ж. берілген №5543-Ж мерзімдік басылым тіркеуіне қойылу туралы куәлік

Мерзімділігі: жылына 6 рет.  
Тиражы: 300 дана.

Редакцияның мекенжайы: 050010, Алматы қ., Шевченко көш., 28, 219 бөл., 220, тел.: 272-13-19, 272-13-18,  
[www.nauka-nanrk.kz](http://www.nauka-nanrk.kz) / [physics-mathematics.kz](http://physics-mathematics.kz)

---

© Қазақстан Республикасының Ұлттық ғылым академиясы, 2017

Типографияның мекенжайы: «Аруна» ЖК, Алматы қ., Муратбаева көш., 75.

Главный редактор  
д.ф.-м.н., проф. академик НАН РК **Г.М. Мутанов**

Редакционная коллегия:

**Джумадильдаев А.С.** проф., академик (Казахстан)  
**Кальменов Т.Ш.** проф., академик (Казахстан)  
**Жантаев Ж.Ш.** проф., чл.-корр. (Казахстан)  
**Умирбаев У.У.** проф. чл.-корр. (Казахстан)  
**Жусупов М.А.** проф. (Казахстан)  
**Джумабаев Д.С.** проф. (Казахстан)  
**Асанова А.Т.** проф. (Казахстан)  
**Бошкаев К.А.** доктор PhD (Казахстан)  
**Сураган Д.** чл.-корр. (Казахстан)  
**Quevedo Hernando** проф. (Мексика),  
**Джунушалиев В.Д.** проф. (Кыргызстан)  
**Вишневский И.Н.** проф., академик (Украина)  
**Ковалев А.М.** проф., академик (Украина)  
**Михалевич А.А.** проф., академик (Беларусь)  
**Пашаев А.** проф., академик (Азербайджан)  
**Такибаев Н.Ж.** проф., академик (Казахстан), зам. гл. ред.  
**Тигиняну И.** проф., академик (Молдова)

«Известия НАН РК. Серия физико-математическая».

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

Собственник: РОО «Национальная академия наук Республики Казахстан» (г. Алматы)  
Свидетельство о постановке на учет периодического печатного издания в Комитете информации и архивов  
Министерства культуры и информации Республики Казахстан №5543-Ж, выданное 01.06.2006 г.

Периодичность: 6 раз в год.  
Тираж: 300 экземпляров.

Адрес редакции: 050010, г. Алматы, ул. Шевченко, 28, ком. 219, 220, тел.: 272-13-19, 272-13-18,  
[www.nauka-nanrk.kz](http://www.nauka-nanrk.kz) / [physics-mathematics.kz](http://physics-mathematics.kz)

---

© Национальная академия наук Республики Казахстан, 2017

Адрес типографии: ИП «Аруна», г. Алматы, ул. Муратбаева, 75.

E d i t o r i n c h i e f  
doctor of physics and mathematics, professor, academician of NAS RK **G.M. Mutanov**

E d i t o r i a l b o a r d:

**Dzhumadildayev A.S.** prof., academician (Kazakhstan)  
**Kalmenov T.Sh.** prof., academician (Kazakhstan)  
**Zhantayev Zh.Sh.** prof., corr. member. (Kazakhstan)  
**Umirbayev U.U.** prof. corr. member. (Kazakhstan)  
**Zhusupov M.A.** prof. (Kazakhstan)  
**Dzhumabayev D.S.** prof. (Kazakhstan)  
**Asanova A.T.** prof. (Kazakhstan)  
**Boshkayev K.A.** PhD (Kazakhstan)  
**Suragan D.** corr. member. (Kazakhstan)  
**Quevedo Hernando** prof. (Mexico),  
**Dzhunushaliyev V.D.** prof. (Kyrgyzstan)  
**Vishnevskiy I.N.** prof., academician (Ukraine)  
**Kovalev A.M.** prof., academician (Ukraine)  
**Mikhalevich A.A.** prof., academician (Belarus)  
**Pashayev A.** prof., academician (Azerbaijan)  
**Takibayev N.Zh.** prof., academician (Kazakhstan), deputy editor in chief.  
**Tiginyanu I.** prof., academician (Moldova)

**News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Physical-mathematical series.**

**ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)**

Owner: RPA "National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan" (Almaty)

The certificate of registration of a periodic printed publication in the Committee of information and archives of the Ministry of culture and information of the Republic of Kazakhstan N 5543-Ж, issued 01.06.2006

Periodicity: 6 times a year

Circulation: 300 copies

Editorial address: 28, Shevchenko str., of. 219, 220, Almaty, 050010, tel. 272-13-19, 272-13-18,  
[www.nauka-nanrk.kz](http://www.nauka-nanrk.kz) / [physics-mathematics.kz](http://physics-mathematics.kz)

---

© National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan, 2017

Address of printing house: ST "Aruna", 75, Muratbayev str, Almaty

**NEWS**

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

**PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES**

ISSN 1991-346X

Volume 6, Number 316 (2017), 5 – 13

UDK 517.956

**A.T. Assanova**

Institute of mathematics and mathematical modeling, Almaty,

E-mail: [assanova@math.kz](mailto:assanova@math.kz), [anarasanova@list.ru](mailto:anarasanova@list.ru)**APPLICATION OF POLYGONAL METHOD  
TO SOLVE OF PERIODIC PROBLEM FOR LOADED  
AND INTEGRO-DIFFERENTIAL PARABOLIC EQUATIONS**

**Abstract.** In the first section, we investigate the periodic boundary value problem for a loaded parabolic equations in a rectangular domain. Using the polygonal method we construct of an algorithms for finding solutions of the periodic boundary value problem for loaded parabolic equations. And the convergence of algorithms is proved. Conditions of unique solvability of the investigated problem are established in the terms of initial data. In the second section, we investigate the periodic boundary value problem for parabolic integro-differential equation in a rectangular domain. The polygonal method develops on parabolic integro-differential equation. Algorithms for finding solutions of the periodic boundary value problem for parabolic integro-differential equations are constructed, and their convergence is proved. Conditions of unique solvability of the investigated problem are established in the terms of initial data.

**Key words:** periodic problem, loaded parabolic equations, integro-differential parabolic equations, polygonal method, algorithm, unique solvability.

This results are partially supported by grant of the Ministry education and science of Republic Kazakhstan No 0822 / ГФ4.

Loaded partial differential equations parabolic type arise in the study of various processes of physics, chemistry, biology, ecology and others [1-5]. Another important class of problems closely related to evolutionary integro-differential equations in partial derivatives are the parabolic integro-differential equations and boundary value problems for them [6-12]. The conditions for unique solvability, the assessment of solutions and their derivatives in terms of the geometric characteristics of the coefficients, the right-hand side, boundary values, and the region where linear boundary value problems for loaded partial differential equations are given, find in numerous applications in the qualitative theory of boundary value problems.

In [13] by using the polygonal method on the spatial variable the boundary value problem for a parabolic equation has been reduced to the solving of family of the Cauchy problem for a system of ordinary differential equations. Using the parametrization method [14] there were established the effective estimates of solutions through the initial data [15]. This approach will be developed on the parabolic loaded and integro-differential equations. There will be developed a constructive method for the solving of periodic boundary value problems for parabolic loaded and integro-differential equations.

By polygonal method on spatial variable the periodic and nonlocal boundary value problems for parabolic integro-differential equations will be reduced to a family of Cauchy problems for systems of ordinary integro-differential equations. On the basis of parameterization method the algorithms for finding the solution will be built and the conditions of unique solvability of the considered problem will be established.

1. Periodic boundary value problem for loaded parabolic equations

We consider a periodic boundary value problem for a loaded parabolic equation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a(t, x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c(t, x)u(t, x) + \alpha(t)u(\theta, x) + f(t, x), \quad (t, x) \in \Omega = (0, T) \times (0, \omega), \quad (1.1)$$

$$u(0, x) = u(T, x), \quad x \in [0, \omega], \quad (1.2)$$

$$u(t, 0) = \psi_0(t), \quad u(t, \omega) = \psi_1(t), \quad t \in [0, T], \quad (1.3)$$

where  $a(t, x) \geq a_0 > 0$ ,  $c(t, x) \leq 0$ ,  $f(t, x)$  are continuous with respect to  $t$ , Holder continuous with respect to  $x$ ,  $\alpha(t)$  is continuous function on  $[0, T]$ . It is assumed that the functions  $\psi_0(t)$ ,  $\psi_1(t)$  are sufficiently smooth and satisfy the matching conditions  $\psi_0(0) = \psi_0(T)$ ,  $\psi_1(0) = \psi_1(T)$ .

The parametrization method is applied to the periodic boundary value problem (1.1)-(1.3). Let  $\lambda(x) = u(0, x)$  and in a problem (1.1)-(1.3) we will carry out replacement  $u(t, x) = \lambda(x) + \tilde{u}(t, x)$ , where  $\tilde{u}(t, x)$  is a new unknown function. Then the periodic boundary value problem (1.1)-(1.3) reduce to the following problem

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} &= a(t, x) \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + c(t, x)\tilde{u}(t, x) + \alpha(t)\tilde{u}(\theta, x) + \\ &+ a(t, x)\ddot{\lambda}(x) + c(t, x)\lambda(x) + \alpha(t)\lambda(x) + f(t, x), \quad (t, x) \in \Omega, \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\tilde{u}(0, x) = 0, \quad x \in [0, \omega], \quad (1.5)$$

$$\tilde{u}(t, 0) + \lambda(0) = \psi_0(t), \quad \tilde{u}(t, \omega) + \lambda(\omega) = \psi_1(t), \quad t \in [0, T], \quad (1.6)$$

$$\tilde{u}(T, x) = 0, \quad x \in [0, \omega]. \quad (1.7)$$

From conditions (1.5) and (1.6) follows

$$\lambda(0) = \psi_0(0), \quad \lambda(\omega) = \psi_1(0).$$

The problem (1.4)-(1.7) is an initial-boundary value problem for a loaded parabolic equation with a parameter. An algorithm for finding the solution of the problem (1.4)-(1.7) is constructed, which consists of two stages: 1) the solving of the initial-boundary value problem for the loaded parabolic equation (1.4)-(1.6) at the fixed parameter by means of a justification polygonal method [42-43]; 2) determination of the parameter from the relation (1.7).

The first stage of the algorithm. We consider an auxiliary initial-boundary value problem for the loaded parabolic equation

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = a(t, x) \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + c(t, x)\tilde{u}(t, x) + \alpha(t)\tilde{u}(\theta, x) + \tilde{f}(t, x), \quad (t, x) \in \Omega, \quad (1.8)$$

$$\tilde{u}(0, x) = 0, \quad x \in [0, \omega], \quad (1.9)$$

$$\tilde{u}(t, 0) = \psi_0(t) - \psi_0(0), \quad \tilde{u}(t, \omega) = \psi_1(t) - \psi_1(0), \quad t \in [0, T], \quad (1.10)$$

where function  $\tilde{f}(t, x)$  is continuous with respect to  $t$ , and is Holder continuous with respect to  $x$ .

The scheme of the polygonal method with respect to the problem (1.8)-(1.10). We take  $h > 0$  and make a discretization by  $x: x_i = ih, i = \overline{0, N}, Nh = \omega, \tilde{u}_i(t) = \tilde{u}(t, ih)$ . The problem (1.8)-(1.10) is replaced by the following form

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} = a_i(t) \frac{\tilde{u}_{i+1} - 2\tilde{u}_i + \tilde{u}_{i-1}}{h^2} + c_i(t)\tilde{u}_i + \alpha(t)\tilde{u}_i(\theta) + \tilde{f}_i(t), \quad \tilde{u}_i(0) = 0, \quad i = \overline{0, N}, \quad (1.11)$$

$$\tilde{u}_0(t) = \psi_0(t) - \psi_0(0), \quad \tilde{u}_N(t) = \psi_1(t) - \psi_1(0), \quad t \in [0, T]. \quad (1.12)$$

Owing to linearity of system for  $\forall h > 0$ , there exists a unique solution of problem (1.11):  $\{\tilde{u}_1(t), \dots, \tilde{u}_{N-1}(t)\}$  defined on  $[0, T]$ .

Taking the functions  $\tilde{u}_{i+1}$ ,  $\tilde{u}_{i-1}$  and the loaded term to the right-hand side of every  $i$  th equation of the system (1.11), we applied the estimate from [15]:

$$\|\tilde{u}_i\| = \max_{t \in [0, T]} \{|\tilde{u}_i(t)|\} \leq \frac{1}{2} \|\tilde{u}_{i-1}(t)\| + \frac{1}{2} \|\tilde{u}_{i+1}(t)\| + \frac{1}{2} \left\| \frac{\alpha(t)}{a_i(t)} \tilde{u}_i(\theta) \right\| h^2 + \frac{1}{2} \left\| \frac{\tilde{f}_i(t)}{a_i(t)} \right\| h^2.$$

Let  $\xi_i = \|\tilde{u}_i\|$ . Then, we obtain the following estimate

$$\xi_i \leq \frac{1}{2} \xi_{i-1} + \frac{1}{2} \xi_{i+1} + \frac{1}{2} \left\| \frac{\alpha(t)}{a_i(t)} \right\| h^2 \xi_i + \frac{1}{2} \left\| \frac{\tilde{f}_i(t)}{a_i(t)} \right\| h^2, \quad i = \overline{1, N-1}. \tag{1.13}$$

Suppose that  $\frac{1}{2} \max_{t \in [0, T]} \left\| \frac{\alpha(t)}{a_i(t)} \right\| h^2 \leq \chi < 1$ ,  $i = \overline{1, N-1}$ , from inequality (1.13), we have

$$\xi_i \leq \frac{1}{2(1-\chi)} \xi_{i-1} + \frac{1}{2(1-\chi)} \xi_{i+1} + \frac{1}{2(1-\chi)} \left\| \frac{\tilde{f}_i(t)}{a_i(t)} \right\| h^2, \quad i = \overline{1, N-1}. \tag{1.14}$$

Next, using sweep up and down, from (1.14) we get

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}_i\| \leq & \frac{N-i}{N(1-\chi)} \|\tilde{\psi}_0\| + \frac{i}{N(1-\chi)} \|\tilde{\psi}_1\| + \frac{N-i}{N(1-\chi)} \sum_{j=1}^i \left\| j \frac{\tilde{f}_j(t)}{a_j(t)} \right\| h^2 + \\ & + \frac{i}{N(1-\chi)} \sum_{j=i+1}^{N-1} \left\| (N-j) \frac{\tilde{f}_j(t)}{a_j(t)} \right\| h^2 \leq K_1, \end{aligned}$$

where  $\tilde{\psi}_0(t) = \psi_0(t) - \psi_0(0)$ ,  $\tilde{\psi}_1(t) = \psi_1(t) - \psi_1(0)$ .

From this inequality it follows the next assertion

**Theorem 1.1.** *Let*

a) *the assumptions with respect to the data of problem (1.1)-(1.3) are fulfilled;*

b) *the inequality  $\frac{1}{2} \max_{t \in [0, T]} \left\| \frac{\alpha(t)}{a_i(t)} \right\| h^2 \leq \chi < 1$  is valid, where  $a_i(t) = a(t, ih)$ ,  $i = \overline{0, N}$ .*

*Then problem (1.8)–(1.10) has a unique classical solution  $\tilde{u}^*(t, x)$ , and for it the estimate holds:*

$$\begin{aligned} \max_{t \in [0, T]} |\tilde{u}^*(t, x)| \leq & \frac{\omega - x}{\omega(1-\chi)} \max_{t \in [0, T]} |\psi_0(t) - \psi_0(0)| + \frac{x}{\omega(1-\chi)} \max_{t \in [0, T]} |\psi_1(t) - \psi_1(0)| + \\ & + \frac{\omega - x}{\omega(1-\chi)} \int_0^x z \cdot \max_{t \in [0, T]} \left| \frac{\tilde{f}(t, z)}{a(t, z)} \right| dz + \frac{x}{\omega(1-\chi)} \int_x^\omega (\omega - z) \cdot \max_{t \in [0, T]} \left| \frac{\tilde{f}(t, z)}{a(t, z)} \right| dz. \end{aligned}$$

Integrating equation (1.8) by variable  $t$  and accounting condition (1.10), we have

$$\begin{aligned} \tilde{u}(t, x) = & \int_0^t a(\tau, x) \frac{\partial^2 \tilde{u}(\tau, x)}{\partial x^2} d\tau + \int_0^t a(\tau, x) d\tau \cdot \ddot{\lambda}(x) + \int_0^t c(\tau, x) \tilde{u}(\tau, x) d\tau + \\ & + \int_0^t c(\tau, x) d\tau \cdot \lambda(x) + \int_0^t \alpha(\tau) d\tau \cdot \tilde{u}(\theta, x) + \int_0^t \alpha(\tau) d\tau \cdot \lambda(x) + \int_0^t f(\tau, x) d\tau. \end{aligned} \tag{1.15}$$

From expression (1.15), we determine the value of function  $\tilde{u}(t, x)$  for  $t = \theta$ :

$$\tilde{u}(\theta, x) = \frac{1}{1 - \int_0^\theta \alpha(\tau) d\tau} \left\{ \int_0^\theta a(\tau, x) \frac{\partial^2 \tilde{u}(\tau, x)}{\partial x^2} d\tau + \int_0^\theta a(\tau, x) d\tau \cdot \ddot{\lambda}(x) + \int_0^\theta c(\tau, x) \tilde{u}(\tau, x) d\tau + \right. \\ \left. + \int_0^\theta c(\tau, x) d\tau \cdot \lambda(x) + \int_0^\theta \alpha(\tau) d\tau \cdot \lambda(x) + \int_0^\theta f(\tau, x) d\tau \right\}.$$

Here, we suppose that  $\int_0^\theta \alpha(\tau) d\tau \neq 1$  and introduce the notation  $\beta(\theta) = \frac{1}{1 - \int_0^\theta \alpha(\tau) d\tau}$ . Then,

the expression (1.15) has the following form

$$\tilde{u}(t, x) = \int_0^t a(\tau, x) \frac{\partial^2 \tilde{u}(\tau, x)}{\partial x^2} d\tau + \int_0^t a(\tau, x) d\tau \cdot \ddot{\lambda}(x) + \int_0^t c(\tau, x) \tilde{u}(\tau, x) d\tau + \\ + \int_0^t c(\tau, x) d\tau \cdot \lambda(x) + \int_0^t \alpha(\tau) d\tau \cdot \lambda(x) + \int_0^t f(\tau, x) d\tau + \\ + \int_0^t \alpha(\tau) d\tau \cdot \beta(\theta) \left\{ \int_0^\theta a(\tau, x) \frac{\partial^2 \tilde{u}(\tau, x)}{\partial x^2} d\tau + \int_0^\theta c(\tau, x) \tilde{u}(\tau, x) d\tau + \right. \\ \left. + \int_0^\theta a(\tau, x) d\tau \cdot \ddot{\lambda}(x) + \int_0^\theta c(\tau, x) d\tau \cdot \lambda(x) + \int_0^\theta \alpha(\tau) d\tau \cdot \lambda(x) + \int_0^\theta f(\tau, x) d\tau \right\}. \quad (1.16)$$

From expression (1.16), we determine the value of function  $\tilde{u}(t, x)$  for  $t = T$  and replace in the condition (1.7):

$$\left[ \int_0^T a(\tau, x) d\tau + \int_0^T \alpha(\tau) d\tau \beta(\theta) \int_0^\theta a(\tau, x) d\tau \right] \ddot{\lambda}(x) = \\ = - \left[ \int_0^T c(\tau, x) d\tau + \int_0^T \alpha(\tau) d\tau + \int_0^T \alpha(\tau) d\tau \beta(\theta) \left\{ \int_0^\theta c(\tau, x) d\tau + \int_0^\theta \alpha(\tau) d\tau \right\} \right] \cdot \lambda(x) - \\ - \int_0^T a(\tau, x) \frac{\partial^2 \tilde{u}(\tau, x)}{\partial x^2} d\tau - \int_0^T c(\tau, x) \tilde{u}(\tau, x) d\tau - \\ - \int_0^T \alpha(\tau) d\tau \beta(\theta) \left[ \int_0^\theta a(\tau, x) \frac{\partial^2 \tilde{u}(\tau, x)}{\partial x^2} d\tau + \int_0^\theta c(\tau, x) \tilde{u}(\tau, x) d\tau \right] - \\ - \int_0^T f(\tau, x) d\tau - \int_0^T \alpha(\tau) d\tau \beta(\theta) \int_0^\theta f(\tau, x) d\tau. \quad (1.17)$$

At fixed  $\tilde{u}(t, x)$  the relation (1.17) with condition  $\lambda(0) = \psi_0(0)$ ,  $\lambda(\omega) = \psi_1(0)$  is two-point boundary value problem for differential equation second order with respect to  $\lambda$ .

The second stage of the algorithm. We consider the auxiliary problem on the interval  $[0, \omega]$

$$\left[ \int_0^T a(\tau, x) d\tau + \int_0^T \alpha(\tau) d\tau \beta(\theta) \int_0^\theta a(\tau, x) d\tau \right] \ddot{\lambda}(x) =$$



$$= - \left[ \int_0^T c(\tau, x) d\tau + \int_0^T \alpha(\tau) d\tau + \int_0^T \alpha(\tau) d\tau \beta(\theta) \left\{ \int_0^\theta c(\tau, x) d\tau + \int_0^\theta \alpha(\tau) d\tau \right\} \right] \cdot \lambda(x) - g(x), \quad (1.18)$$

where  $g(x)$  is continuous function on  $[0, \omega]$ .

From the matching condition we obtain

$$\lambda(0) = \psi_0(0), \quad \lambda(\omega) = \psi_1(0). \quad (1.19)$$

The problem (1.18), (1.19) is a two-point boundary value problem for a second-order differential equation with respect to a function  $\lambda(x)$ .

Let

$$\begin{aligned} \tilde{a}(x) &= \int_0^T a(\tau, x) d\tau + \int_0^T \alpha(\tau) d\tau \beta(\theta) \int_0^\theta a(\tau, x) d\tau, \\ \tilde{b}(x) &= \int_0^T c(\tau, x) d\tau + \int_0^T \alpha(\tau) d\tau + \int_0^T \alpha(\tau) d\tau \beta(\theta) \left\{ \int_0^\theta c(\tau, x) d\tau + \int_0^\theta \alpha(\tau) d\tau \right\}, \end{aligned}$$

The following assertion given of a conditions unique solvability to problem (1.18), (1.19).

**Theorem 1.2.** *Let*

a) *the assumptions with respect to the data of problem (1.1)-(1.3) are fulfilled;*

b) *the condition  $\int_0^\theta \alpha(\tau) d\tau \neq 1$  is valid;*

c) *the condition  $\int_0^T a(\tau, x) d\tau + \int_0^T \alpha(\tau) d\tau \beta(\theta) \int_0^\theta a(\tau, x) d\tau \neq 0$  is valid for all  $x \in [0, \omega]$ ;*

d) *the inequality holds:  $\max\left(1, \frac{2}{\omega}\right) [e^{\alpha\omega} - 1 - \alpha\omega] < 1$ , wher*

$$e \quad \alpha = \max\left(1, 1 / \max_{x \in [0, \omega]} |\tilde{a}(x)|\right) \cdot \max\left(\max_{x \in [0, \omega]} |b(x)|, 1\right).$$

*Then problem (1.18), (1.19) has a unique solution  $\lambda^*(x)$ .*

Theorems 1.1 and 1.2 given of the conditions unique solvability of auxiliary problems (1.8)-(1.10) and (1.18), (1.19) in the terms of initial data.

On each step of the algorithm: 1) the initial-boundary value problem for the parabolic integro-differential equation is solved at a fixed  $\lambda(x)$ ; 2) a two-point boundary value problem for a second-order differential equation is solved at a fixed  $\tilde{u}(t, x)$ .

Conditions of Theorems 1.1 and 1.2 guarantee of realizable and convergence of proposed algorithm.

## 2. Periodic boundary value problem for parabolic integro-differential equations

We consider periodic boundary value problem for parabolic integro-differential equations

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a(t, x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c(t, x) u(t, x) + \alpha(t) \int_0^t u(\tau, x) d\tau + f(t, x), \quad (t, x) \in \Omega, \quad (2.1)$$

$$u(0, x) = u(T, x), \quad x \in [0, \omega], \quad (2.2)$$

$$u(t, 0) = \psi_0(t), \quad u(t, \omega) = \psi_1(t), \quad t \in [0, T], \quad (2.3)$$

where  $a(t, x) \geq a_0 > 0$ ,  $c(t, x) \leq 0$ ,  $f(t, x)$  - are continuous with respect to  $t$ , Holder continuous with respect to  $x$ ,  $\alpha(t)$  is continuous function on  $[0, T]$ . It is assumed that the functions  $\psi_0(t)$ ,  $\psi_1(t)$  are sufficiently smooth and satisfy the matching conditions  $\psi_0(0) = \psi_0(T)$ ,  $\psi_1(0) = \psi_1(T)$ .

To the periodic boundary-value problem (2.1)-(2.3) we apply the parametrization method. Suppose  $\lambda(x) = u(0, x)$ , and in the problem (2.1)-(2.3) we make a substitution  $u(t, x) = \tilde{u}(t, x) + \lambda(x)$ , where

$\tilde{u}(t, x)$  is a new unknown function. Then the periodic boundary value problem (2.1) - (2.3) reduces to the following equivalent problem

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = a(t, x) \left[ \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \ddot{\lambda}(x) \right] + c(t, x) [\tilde{u}(t, x) + \lambda(x)] + \alpha(t) \int_0^t \tilde{u}(\tau, x) d\tau + \alpha(t) \lambda(x) + f(t, x), \quad (2.4)$$

$$(t, x) \in \Omega,$$

$$\tilde{u}(0, x) = 0, \quad x \in [0, \omega], \quad (2.5)$$

$$\tilde{u}(t, 0) + \lambda(0) = \psi_0(t), \quad \tilde{u}(t, \omega) + \lambda(\omega) = \psi_1(t), \quad t \in [0, T], \quad (2.6)$$

$$\tilde{u}(T, x) = 0, \quad x \in [0, \omega]. \quad (2.7)$$

From the conditions (2.5) and (2.6) follows  $\lambda(0) = \psi_0(0)$ ,  $\lambda(\omega) = \psi_1(0)$ .

The problem (2.4) - (2.7) is an initial-boundary value problem for parabolic integro-differential equation with a parameter. An algorithm for finding the solution of problem (2.4) - (2.7) is constructed, which consists of two stages.

The first stage of the algorithm. We consider an auxiliary initial-boundary value problem for the parabolic integro-differential equation

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = a(t, x) \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + c(t, x) \tilde{u}(t, x) + \alpha(t) \int_0^t \tilde{u}(\tau, x) d\tau + \tilde{f}(t, x), \quad (t, x) \in \Omega, \quad (2.8)$$

$$\tilde{u}(0, x) = 0, \quad x \in [0, \omega], \quad (2.9)$$

$$\tilde{u}(t, 0) = \psi_0(t) - \psi_0(0), \quad \tilde{u}(t, \omega) = \psi_1(t) - \psi_1(0), \quad t \in [0, T], \quad (2.10)$$

where function  $\tilde{f}(t, x)$  is continuous with respect to  $t$ , and is Holder continuous with respect to  $x$ .

The scheme of the polygonal method in relation to the problem (10.8) - (10.10). We take  $h > 0$  and make a discretization by  $x$ :  $x_i = ih$ ,  $i = \overline{0, N}$ ,  $Nh = \omega$ ,  $\tilde{u}_i(t) = \tilde{u}(t, ih)$ . The problem (2.8) - (2.10) is replaced by the following

$$\frac{d\tilde{u}_i}{dt} = a_i(t) \frac{\tilde{u}_{i+1} - 2\tilde{u}_i + \tilde{u}_{i-1}}{h^2} + c_i(t) \tilde{u}_i + \alpha(t) \int_0^t \tilde{u}_i(\tau) d\tau + \tilde{f}_i(t), \quad \tilde{u}_i(0) = 0, \quad i = \overline{0, N}, \quad (2.11)$$

$$\tilde{u}_0(t) = \psi_0(t) - \psi_0(0), \quad \tilde{u}_N(t) = \psi_1(t) - \psi_1(0), \quad t \in [0, T]. \quad (2.12)$$

Owing to linearity of system for  $\forall h > 0$ , there exists a unique solution of problem (2.11):  $\{\tilde{u}_1(t), \dots, \tilde{u}_{N-1}(t)\}$  defined on  $[0, T]$ .

Taking the functions  $\tilde{u}_{i+1}$ ,  $\tilde{u}_{i-1}$  and the integral term to the right-hand side of every  $i$  th equation of the system (2.11), we applied the estimate from [15]:

$$\|\tilde{u}_i\| = \max_{t \in [0, T]} \{\tilde{u}_i(t)\} \leq \frac{1}{2} \|\tilde{u}_{i-1}\| + \frac{1}{2} \|\tilde{u}_{i+1}\| + \frac{1}{2} \left\| \frac{\alpha(t)}{a_i(t)} \int_0^t \tilde{u}_i(\tau) d\tau \right\| h^2 + \frac{1}{2} \left\| \frac{\tilde{f}_i(t)}{a_i(t)} \right\| h^2.$$

Let  $\xi_i = \|\tilde{u}_i\|$ . Then, we obtain the following estimate

$$\xi_i \leq \frac{1}{2} \xi_{i-1} + \frac{1}{2} \xi_{i+1} + \frac{1}{2} \left\| \frac{\alpha(t)}{a_i(t)} \right\| h^2 T \xi_i + \frac{1}{2} \left\| \frac{\tilde{f}_i(t)}{a_i(t)} \right\| h^2, \quad i = \overline{1, N-1}. \quad (2.13)$$

Suppose that  $\frac{1}{2} \max_{t \in [0, T]} \left\| \frac{\alpha(t)}{a_i(t)} \right\| Th^2 \leq \chi < 1$ ,  $i = \overline{1, N-1}$ , from inequality (2.13) we get

$$\xi_i \leq \frac{1}{2(1-\chi)} \xi_{i-1} + \frac{1}{2(1-\chi)} \xi_{i+1} + \frac{1}{2(1-\chi)} \left\| \frac{\tilde{f}_i(t)}{a_i(t)} \right\| h^2, \quad i = \overline{1, N-1}. \quad (2.14)$$

Further, using sweep up and down, from (2.14) we have

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}_i\| \leq & \frac{N-i}{N(1-\chi)} \|\tilde{\psi}_0\| + \frac{i}{N(1-\chi)} \|\tilde{\psi}_1\| + \frac{N-i}{N(1-\chi)} \sum_{j=1}^i \left\| j \frac{\tilde{f}_j(t)}{a_j(t)} \right\| h^2 + \\ & + \frac{i}{N(1-\chi)} \sum_{j=i+1}^{N-1} \left\| (N-j) \frac{\tilde{f}_j(t)}{a_j(t)} \right\| h^2 \leq K_2, \end{aligned}$$

where  $\tilde{\psi}_0(t) = \psi_0(t) - \psi_0(0)$ ,  $\tilde{\psi}_1(t) = \psi_1(t) - \psi_1(0)$ .

From this inequality it follows the next assertion

**Theorem 2.1.** *Let*

a) *the assumptions with respect to the data of problem (2.1)-(2.3) are fulfilled;*

b) *the inequality  $\frac{1}{2} \max_{t \in [0, T]} \left\| \frac{\alpha(t)}{a_i(t)} \right\| Th^2 \leq \chi < 1$  is valid, where  $a_i(t) = a(t, ih)$ ,  $i = \overline{0, N}$ .*

*Then problem (2.8)–(2.10) has a unique classical solution  $\tilde{u}^*(t, x)$ , and for it the estimate holds:*

$$\begin{aligned} \max_{t \in [0, T]} |\tilde{u}^*(t, x)| \leq & \frac{\omega - x}{\omega(1-\chi)} \max_{t \in [0, T]} |\psi_0(t) - \psi_0(0)| + \frac{x}{\omega(1-\chi)} \max_{t \in [0, T]} |\psi_1(t) - \psi_1(0)| + \\ & + \frac{\omega - x}{\omega(1-\chi)} \int_0^x z \cdot \max_{t \in [0, T]} \left| \frac{\tilde{f}(t, z)}{a(t, z)} \right| dz + \frac{x}{\omega(1-\chi)} \int_x^\omega (\omega - z) \cdot \max_{t \in [0, T]} \left| \frac{\tilde{f}(t, z)}{a(t, z)} \right| dz. \end{aligned}$$

Integrating equation (2.8) by variable  $t$  and accounting condition (2.10), we have

$$\begin{aligned} \tilde{u}(t, x) = & \int_0^t a(\tau, x) \frac{\partial^2 \tilde{u}(\tau, x)}{\partial x^2} d\tau + \int_0^t a(\tau, x) d\tau \cdot \ddot{\lambda}(x) + \int_0^t c(\tau, x) \tilde{u}(\tau, x) d\tau + \\ & + \int_0^t c(\tau, x) d\tau \cdot \lambda(x) + \int_0^t \alpha(\tau) \int_0^\tau \tilde{u}(\tau_1, x) d\tau_1 d\tau + \int_0^t \alpha(\tau) d\tau \cdot \lambda(x) + \int_0^t f(\tau, x) d\tau. \end{aligned} \tag{2.15}$$

From expression (2.15), we determine the value of function  $\tilde{u}(t, x)$  for  $t = T$  and replace in the condition (2.7):

$$\begin{aligned} \int_0^T a(\tau, x) d\tau \cdot \ddot{\lambda}(x) = & - \left[ \int_0^T c(\tau, x) d\tau + \int_0^T \alpha(\tau) d\tau \right] \cdot \lambda(x) - \\ & - \int_0^T a(\tau, x) \frac{\partial^2 \tilde{u}(\tau, x)}{\partial x^2} d\tau - \int_0^T c(\tau, x) \tilde{u}(\tau, x) d\tau - \int_0^T \alpha(\tau) \int_0^\tau \tilde{u}(\tau_1, x) d\tau_1 d\tau - \int_0^T f(\tau, x) d\tau. \end{aligned} \tag{2.16}$$

The second stage of the algorithm. We consider the auxiliary problem

$$\int_0^T a(\tau, x) d\tau \cdot \ddot{\lambda}(x) = - \left[ \int_0^T c(\tau, x) d\tau + \int_0^T \alpha(\tau) d\tau \right] \cdot \lambda(x) - g(x), \tag{2.17}$$

where  $g(x)$  is continuous function on  $[0, \omega]$ .

From the matching condition we obtain

$$\lambda(0) = \psi_0(0), \quad \lambda(\omega) = \psi_1(0). \tag{2.18}$$

The problem (2.17), (2.18) is the two-point boundary value problem for the second-order differential equation with respect to a function  $\lambda(x)$ .

$$\text{Let } \tilde{a}_1(x) = \int_0^T a(\tau, x) d\tau, \quad \tilde{b}_1(x) = \int_0^T c(\tau, x) d\tau + \int_0^T \alpha(\tau) d\tau,$$

The following assertion given of a conditions unique solvability to problem (2.17), (2.18).

**Theorem 2.2.** *Let*

a) *the assumptions with respect to the data of problem (2.1)-(2.3) are fulfilled;*

b) *the condition  $\int_0^T a(\tau, x) d\tau \neq 0$  is valid for all  $x \in [0, \omega]$ ;*

c) *the inequality holds:  $\max\left(1, \frac{2}{\omega}\right) [e^{\alpha\omega} - 1 - \alpha\omega] < 1$ , where*

$$\alpha = \max\left(1, 1/\max_{x \in [0, \omega]} |\tilde{a}_1(x)|\right) \cdot \max\left(\max_{x \in [0, \omega]} |b_1(x)|, 1\right).$$

*Then problem (2.17), (2.18) has a unique solution  $\lambda^*(x)$ .*

Theorems 2.1 and 2.2 given of the conditions unique solvability of auxiliary problems (2.8)-(2.10) and (2.17), (2.18) in the terms of initial data.

On each step of the algorithm: 1) the initial-boundary value problem for the parabolic integro-differential equation is solved at a fixed  $\lambda(x)$ ; 2) a two-point boundary value problem for a second-order differential equation is solved at a fixed  $\tilde{u}(t, x)$ .

Conditions of Theorems 2.1 and 2.2 guarantee of realizable and convergence of proposed algorithm. The proof of the convergence of the proposed algorithms is based on the results of the work [16-23].

#### REFERENCES

- [1] Nakhushiev A.M. Equations of mathematical biology. M.: Vyshaiya shkola, 1995. (in Russ.)
- [2] Dzhenaliev M.T. To the theory linear boundary value problems for loaded differential equations. Almaty: Computenyi centr ITPM, 1995. (in Russ.)
- [3] Nakhushiev A.M. Problems with replacement for partial differential equations. M.: Nauka, 2006. (in Russ.)
- [4] Dzhenaliev M.T., Ramazanov M.I. Loaded equations as perturbations of differential equations. Almaty: Gylym, 2010. (in Russ.)
- [5] Nakhushiev A.M. Loaded equations and their applications. M.: Nauka, 2012. (in Russ.)
- [6] Gil' M.I. Stability of Fredholm type integro-parabolic equations, J. of Math. Anal. and Appl., 244 (2000), pp. 318-332.
- [7] Pao C.V. Numerical methods for nonlinear integro-differential equations of Fredholm type, Comp. Math. Appl., 41(2001), pp. 857-877.
- [8] Matache A.-M., Schwab C., Wihler T. Fast numerical solution of parabolic integrodifferential equations with applications in finance, SIAM J. Sci. Comput., 27(2005), pp. 369-393.
- [9] Sachs E.W., Strauss A.K. Efficient solution of a partial integro-differential equation in finance, Appl. Numer. Math., 58(2008), pp. 1687-1703.
- [10] Dabas J., Bahuguna D. An integro-differential parabolic problem with an integral boundary condition, Math. and Comp. Mod., 50(2009), pp. 123-131.
- [11] Long W., Xu D., Zeng X. Quasi wavelet based numerical method for a class of partial integro-differential equation, Appl. Math. Comp., 218(2012), pp. 11842-11850.
- [12] Geiser J. An iterative splitting approach for linear integro-differential equations, Appl. Math. Lett., 26(2013), pp. 1048-1052.
- [13] Dzhumabaev D.S. Justification of a method of broken lines for one boundary value problem of the linear parabolic equation, Izvestia AN KazSSR. Ser. Fiz.-matem. (1983), No 1. pp. 8-11. (in Russian)
- [14] Dzhumabaev D.S. Conditions the unique solvability of a linear boundary value problem for an ordinary differential equations, Comp. Math. and Math. Phys., 29 (1989), No 1. pp. 34-46.
- [15] Dzhumabaev D.S., Asanova A.T. About estimates of solutions and their derivative of boundary value problems for the parabolic equations, Izvestia MON, NAN RK. Ser. Fiz.-matem. (2000), No 5. pp.3-9.
- [16] Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. Unique solvability of the boundary value problem for systems of hyperbolic equations with data on the characteristics // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2002. Vol. 42. No 11. P. 1609-1621.
- [17] Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. Correct solvability of a nonlocal boundary value problem for systems of hyperbolic equations // Doklady Mathematics. 2003. Vol. 68. No 1. P. 46-49.
- [18] Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. Unique solvability of nonlocal boundary value problems for systems of hyperbolic equations //Differential Equations. 2003. Vol. 39. - No 10. P. 1414-1427.
- [19] Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. Well-posed solvability of nonlocal boundary value problems for systems of hyperbolic equations // Differential Equations. 2005. Vol. 41. No 3. P. 352-363.

[20] Asanova A.T. On the unique solvability of a family of two-point boundary-value problems for systems of ordinary differential equations // Journal of Mathematical Sciences. 2008. Vol. 150. No 5. P. 2302-2316.

[21] Asanova A.T. On the unique solvability of a nonlocal boundary value problem with data on intersecting lines for systems of hyperbolic equations // Differential Equations. 2009. Vol. 45. No 3. P. 385-394.

[22] Asanova A.T. On a boundary-value problem with data on non-characteristic intersecting lines for systems of hyperbolic equations with mixed derivative // Journal of Mathematical Sciences (United States). 2012. Vol. 187. No 4. P. 375-386.

[23] Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. Well-posedness of nonlocal boundary value problems with integral condition for the system of hyperbolic equations // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2013. Vol. 402. No 1. P. 167-178.

**А.Т. Асанова**

### **СЫНЫҚТАР ӘДІСІНІҢ ЖҮКТЕЛГЕН ЖӘНЕ ИНТЕГРАЛДЫҚ-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ПАРАБОЛАЛЫҚ ТЕНДЕУЛЕР ҮШІН ПЕРИОДТЫ ЕСЕПТІ ШЕШУГЕ ҚОЛДАНЫЛУЫ**

**Аннотация.** Бірінші бөлімде жүктелген параболалық теңдеу үшін периодты есеп тіктөртбұрышты облыста қарастырылады. Сынықтар әдісін пайдалана отырып біз жүктелген параболалық теңдеулер үшін периодты есепті шешудің алгоритмдерін құрамыз. Алгоритмнің жинақтылығы дәлелденеді. Зерттеліп отырған есептің шешілімділік шарттары бастапқы берілімдер терминдерінде берілген. Екінші бөлімде интегралдық-дифференциалдық параболалық теңдеу үшін периодты есеп тіктөртбұрышты облыста қарастырылады. Сынықтар әдісі интегралдық-дифференциалдық параболалық теңдеулерге дамытылады. Интегралдық-дифференциалдық параболалық теңдеулер үшін периодты есептің шешімін табу алгоритмдері құрылған және олардың жинақтылығы дәлелденген. Зерттеліп отырған есептің шешілімділік шарттары бастапқы берілімдер терминдерінде берілген.

**Тірек сөздер:** периодты есеп, жүктелген параболалық теңдеулер, интегралдық-дифференциалдық параболалық теңдеулер, алгоритм, бірмәнді шешілімділік.

**А.Т. Асанова**

### **ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ЛОМАННЫХ К РЕШЕНИЮ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ**

**Аннотация.** В первой части рассматривается периодическая задача для нагруженного параболического уравнения в прямоугольной области. Используя метод ломаных мы строим алгоритмы нахождения решения периодической краевой задачи для нагруженных параболических уравнений. Доказывается сходимость алгоритма. Условия разрешимости исследуемой задачи даются в терминах исходных данных. Во второй части рассматривается периодическая задача для интегро-дифференциального параболического уравнения в прямоугольной области. Метод ломаных развивается на интегро-дифференциальные параболические уравнения. Построены алгоритмы нахождения решения периодической краевой задачи для интегро-дифференциальных параболических уравнений и доказана их сходимость. Условия разрешимости исследуемой задачи даются в терминах исходных данных.

**Ключевые слова:** периодическая задача, нагруженные параболические уравнения, интегро-дифференциальные параболические уравнения, метод ломаных, алгоритм, однозначная разрешимость.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN  
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 6, Number 316 (2017), 14 – 21

UDC 517.957, 517.958

**A. Sergazina, K. Yesmakhanova, K. Yerzhanov, D. Tungushbaeva**

L.N.Gumilyov Eurasian National University, Astana, 010008, Kazakhstan  
[kryesmakhanova@gmail.com](mailto:kryesmakhanova@gmail.com)

## DARBOUX TRANSFORMATION FOR THE (1+1)-DIMENSIONAL NONLOCAL FOCUSING NONLINEAR SCHRÖDINGER EQUATION

**Abstract.** In this article, we consider a (1+1)-dimensional nonlocal focusing nonlinear Schrödinger equation. This equation is studied in works M.J. Ablowitz and Ziad H. Musslimani, Li-Yuan Ma, Zuo-Nong Zhu, T. A. Gadzhimuradov A. M. Agalarov and other. The nonlocal nonlinear Schrödinger equation is integrable the inverse scattering methods. We constructed Darboux transformation (DT) of this equation. Also, we will derive determinant representation of one-fold, two-fold and n-fold DT of (1+1)-dimensional nonlocal focusing Schrödinger equation. As an application of these conversion of this equation, soliton solutions will get from trivial "seed" solutions.

**Key words:** (1+1)-dimensional nonlocal focusing nonlinear Schrödinger equation, integrable system, Lax pair, determinant representation of one and two-fold Darboux transformation.

### Introduction

Nonlinear Schrödinger equation (NLS) is one classical integrable nonlinear equations. It appears in a variety of physical areas like nonlinear optics, plasma physics, fluid mechanics as well as in purely mathematical context like differential geometry of curve. Nonlinearity is the fascinating subjects which has many applications in almost all areas of science. Usually nonlinear phenomena are modeled by nonlinear ordinary or partial differential equations. Many of these nonlinear differential equations (NDE) are completely integrable. This means that these integrable NDS have some classes of interesting exact solutions such as solitons, dromions,rogue waves, similaritons and so on. They are of great mathematical as well as physical interest and the investigation of the solitons become one of the most exciting and extremely active areas of research in modern science and technology in the past several decades. In particular, many of the completely integrable NDE have been found and studied [1]-[5].

### Lax pair of the (1+1)-dimensional nonlocal focusing nonlinear Schrödinger equation

In the section we consider the (1+1)-dimensional nonlocal focusing nonlinear Schrödinger equation, which reads as

$$iq_t(x,t) + iq_{xx}(x,t) + 2q(x,t)q^*(-x,t)q(x,t) = 0, \quad (1)$$

$$iq_t^*(-x,t) + iq_{xx}^*(x,t) - 2q^*(-x,t)q(x,t)q^*(-x,t) = 0, \quad (2)$$

where  $q(x,t)$ ,  $q^*(-x,t)$  are complex functions of the real variables  $x, t$  denote partial derivatives with respect to the variables. It is obvious that self-induced potential  $\psi(x,t) = q(x,t)q^*(x,t)$  is *PT* symmetric:  $q(x,t) = q^*(-x,t)$ .

These equations are studied in works M.J. Ablowitz1 and Ziad H. Musslimani, Li-Yuan Ma, Zuo-Nong Zhu, T. A. Gadzhimuradov A. M. Agalarov [6]-[12] and other.

We will concentrate on the linear eigenvalue problem of the (1+1)-dimensional nonlocal focusing nonlinear Schrödinger equation (1)-(2). The linear problem is expressed in the form of the Lax pair  $A$  and  $B$  as

$$\psi_x = A\psi, \quad (3)$$

$$\psi_t = B\psi, \quad (4)$$

where  $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1(x,t,\lambda) \\ \psi_2(x,t,\lambda) \end{pmatrix}$  is the vector eigenfunction,  $\lambda$  is a spectral parameter and  $A, B$  matrices  $2 \times 2$  have the form

$$A = -i\lambda\sigma_3 + A_0, \quad B = \lambda^2 B_2 + \lambda B_1 + B_0.$$

Here  $\sigma_3, A_0, B_2, B_1, B_0$  are  $2 \times 2$  matrices:

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_0 = \begin{pmatrix} 0 & q(x,t) \\ -q^*(-x,t) & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} -2i & 0 \\ 0 & 2i \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2q(x,t) \\ -2q^*(-x,t) & 0 \end{pmatrix}, \quad B_0 = i \begin{pmatrix} q(x,t)q^*(-x,t) & q_x(x,t) \\ -q_x^*(-x,t) & -q(x,t)q^*(-x,t) \end{pmatrix}$$

cross derivatives  $\psi_{xt} = \psi_{tx}$  from (3), (4).

This equation (1) - (2) is integrable by the inverse scattering method [1]. The inverse scattering method implies that the partial differential equation can be represented as a Lax pair, a linear system of two operators  $A$  and  $B$  from (3) - (4) whose compatibility condition is the system (1) - (2) under consideration

$$A_t - B_x + AB - BA = 0.$$

In this next section, we construct one-fold DT of the (1+1)-dimensional nonlocal focusing nonlinear Schrödinger equation [6]-[15].

### One-fold Darboux transformation for the (1+1)-dimensional nonlocal focusing nonlinear Schrödinger equation

Darboux transformations constitute one of the most fruitful approaches to the construction of soliton type solutions of integrable nonlinear equations. DT transform solutions of partial differential equations into solutions of same class partial differential equations.

We consider the following transformation of the system of equation (3)-(4)

$$\psi^{[1]} = T\psi = (\lambda I - M)\psi, \quad (5)$$

such that the new function  $\psi^{[1]}$  satisfies system

$$\begin{aligned} \psi_x^{[1]} &= A^{[1]}\psi^{[1]}, \\ \psi_t^{[1]} &= B^{[1]}\psi^{[1]} \end{aligned} \quad (6)$$

where matrices  $A^{[1]}$  and  $B^{[1]}$  depend on functions  $q^{[1]}(x,t), q^{*[1]}(-x,t)$  and  $\lambda$ . Here  $M$  and  $I$  are matrices have the form

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

The relation between  $q^{[1]}(x,t), q^{*[1]}(-x,t)$  and  $A^{[1]} - B^{[1]}$  is the same as the relation between functions  $q(x,t), q^*(-x,t)$  and  $A - B$ . In order the equations (6) to hold, Darboux matrix  $T$  must satisfy the following equations

$$\lambda^0 : M_x = A_0^{[1]} M - M A_0, \quad (7)$$

$$\lambda^1 : A_0^{[1]} = A_0 + i[M, \sigma_3], \quad (8)$$

$$\lambda^2 : iI\sigma_3 = iI\sigma_3. \quad (9)$$

Finally, from identities (7)-(9) we obtain solutions of equations (1)-(2)

$$q^{[1]} = q - 2im_{12}, \quad q^{*[1]} = q^* - 2im_{21}, \quad (10)$$

Hence we get conclusion  $m_{21} = -m_{12}^*$  in our attractive interaction case. Then, comparing the coefficients of  $\lambda^i$  ( $i = 0, 1, 2$ ) of the two sides of the equation (6) gives us of the following identities

$$\lambda^0 : M_t = B_0^{[1]} M - M B_0, \quad (11)$$

$$\lambda^1 : B_0 - M B_1 = B_0^{[1]} - B_1^{[1]} M, \quad (12)$$

$$\lambda^2 : B_1 - M B_2 = B_1^{[1]} - B_2^{[1]} M. \quad (13)$$

Then the system of equations (11)-(13) gives

$$iq^{[1]} q^{*[1]} - 2q^{[1]} m_{21} - 2q^* m_{12} - iq q^* = 0,$$

$$iq^{[1]} q^{*[1]} - 2q^{[1]} m_{12} - 2q m_{21} - iq q^* = 0,$$

$$iq_x^{[1]} - 2q^{[1]} m_{22} + 2q m_{11} - iq_x = 0,$$

$$iq_1^{*[1]} - 2q^{*[1]} m_{11} + 2q^* m_{22} - iq_x^* = 0.$$

These equation (7)-(13) give one-fold transformation of the (1+1)-dimensional nonlocal focusing nonlinear Schrödinger equation (1)-(2).

We now assume that matrix  $M$  in the canonical form

$$M = H \Lambda H^{-1}, \quad (14)$$

where  $\det H \neq 0$  and  $H, \Lambda$  has form

$$H = \begin{pmatrix} \psi_1(\lambda_1, x, t) & \psi_1(\lambda_2, x, t) \\ \psi_2(\lambda_1, x, t) & \psi_2(\lambda_2, x, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_{1,1} & \psi_{1,2} \\ \psi_{2,1} & \psi_{2,2} \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad (15)$$

and  $\lambda_1, \lambda_2$  are complex constants. In order to satisfy the constants of  $A_0$  as mentioned above, then

$$\begin{aligned} \psi^+ &= \psi^{-1}, \quad A_0^+ = -A_0, \\ \lambda_2 &= -\lambda_1^{-1}, \quad H = \begin{pmatrix} \psi_1(\lambda_1, x, t) & -\psi_2^*(\lambda_1, x, t) \\ \psi_2(\lambda_1, x, t) & \psi_1^*(\lambda_1, x, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1 & -\psi_2^* \\ \psi_2 & \psi_1^* \end{pmatrix}, \quad H^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \psi_1^* & \psi_2^* \\ \psi_2 & \psi_1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (16)$$

where  $\Delta = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2$ . Also matrix  $H$  satisfy Lax pair (3), (4)

$$\begin{aligned} H_x &= -i\sigma_3 H \Lambda + A_0 H, \\ H_t &= -2\sigma_3 H \Lambda^2 + B_1 H \Lambda + B_0 H. \end{aligned}$$



From (14) use formula (15), (16) we get the values of the matrix  $M$

$$M = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \lambda_1 |\psi_1|^2 - \lambda_1^* |\psi_2|^2 & (\lambda_1 + \lambda_1^*) \psi_1 \psi_2^* \\ (\lambda_1 + \lambda_1^*) \psi_2 \psi_1^* & \lambda_1 |\psi_2|^2 - \lambda_1^* |\psi_1|^2 \end{pmatrix}.$$

In the following section we give the determinant representation of the one-fold and two-fold DT for the (1+1)-dimensional nonlocal nonlinear Schrödinger equation.

### Determinant representation of Darboux transformation for the (1+1)-dimensional nonlocal focusing nonlinear Schrödinger equation

Here the determinant representation is constructed for the one-fold and two-fold DT of the (1+1)-dimensional nonlocal nonlinear Schrödinger equation. The reduction condition on the eigenfunctions are  $\psi_{2,2i} = \psi_{1,2i-1}^*$ ,  $\psi_{2,2i-1} = -\psi_{1,2i}^*$  and for the eigenvalues are  $\lambda_{2i} = \lambda_{2i-1}^*$ .

The determinant representation of the one-fold DT of the (1+1)-dimensional nonlocal nonlinear Schrödinger equation formulate the following theorem (as papers [13]-[16]).

*Theorem 1.* The one-fold DT of the (1+1)-dimensional nonlocal focusing nonlinear Schrödinger equation is

$$T_1(\lambda, \lambda_1, \lambda_2) = \lambda I - M = \lambda I + t_0^{[1]} = \frac{1}{\Delta_1} \begin{pmatrix} (T_1)_{11} & (T_1)_{12} \\ (T_1)_{21} & (T_1)_{22} \end{pmatrix}, \quad (17)$$

where

$$t_0^{[1]} = \frac{1}{\Delta_1} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} \psi_{2,1} & \lambda_1 \psi_{1,1} \\ \psi_{2,2} & \lambda_2 \psi_{1,2} \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} \psi_{1,1} & \lambda_1 \psi_{1,1} \\ \psi_{1,2} & \lambda_2 \psi_{1,2} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \psi_{2,1} & \lambda_1 \psi_{2,1} \\ \psi_{2,2} & \lambda_2 \psi_{2,2} \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} \psi_{1,1} & \lambda_1 \psi_{2,1} \\ \psi_{1,2} & \lambda_2 \psi_{2,2} \end{vmatrix} \end{pmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} \psi_{1,1} & \psi_{1,2} \\ \psi_{2,1} & \psi_{2,2} \end{vmatrix}, \quad (18)$$

$$(T_1)_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ \psi_{1,1} & \psi_{2,1} & \lambda_1 \psi_{1,1} \\ \psi_{1,2} & \psi_{2,2} & \lambda_2 \psi_{1,2} \end{vmatrix}, \quad (T_1)_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \psi_{1,1} & \psi_{2,1} & \lambda_1 \psi_{1,1} \\ \psi_{1,2} & \psi_{2,2} & \lambda_2 \psi_{1,2} \end{vmatrix}, \quad (19a)$$

$$(T_1)_{21} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \psi_{1,1} & \psi_{2,1} & \lambda_1 \psi_{2,1} \\ \psi_{1,2} & \psi_{2,2} & \lambda_2 \psi_{2,2} \end{vmatrix}, \quad (T_1)_{22} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \lambda \\ \psi_{1,1} & \psi_{2,1} & \lambda_1 \psi_{2,1} \\ \psi_{1,2} & \psi_{2,2} & \lambda_2 \psi_{2,2} \end{vmatrix}. \quad (19b)$$

The matrix  $T_1$  satisfies the following equations of system

$$T_{1x} + T_1 A = A^{[1]} T_1, \quad (20a)$$

$$T_{1t} + T_1 B = B^{[1]} T_1. \quad (20b)$$

From (20) we get for  $A_0^{[1]}$ :

$$A_0^{[1]} = A_0 + [\sigma_3, t_0^{[1]}]. \quad (21)$$

Then the solutions of the system (1)-(2) have the form

$$q^{[1]} = q - 2im_{12} = q + 2i(t_0^{[1]})_{12} = q - 2i \frac{(T_1)_{12}}{\Delta_1}, \quad (22a)$$

$$q^{*[1]} = q^* - 2im_{21} = q^* + 2i(t_0^{[1]})_{21} = q^* - 2i \frac{(T_1)_{21}}{\Delta_1}. \quad (22b)$$

We can find the transformation  $T_1$  which has the following property

$$T_1(\lambda, \lambda_1, \lambda_2) \Big|_{\lambda=\lambda_1} \begin{pmatrix} \psi_{1,1} \\ \psi_{2,1} \end{pmatrix} = 0. \quad (23)$$

Now we prove the theorem.

*Proof of the theorem.*

From the formulae (5), (14), (23) it follows that

$$M = \frac{1}{\Delta_1} \begin{pmatrix} \lambda_1 \psi_{1,1} \psi_{2,2} - \lambda_2 \psi_{1,2} \psi_{2,1} & (\lambda_2 - \lambda_1) \psi_{1,1} \psi_{1,2} \\ (\lambda_1 - \lambda_2) \psi_{2,1} \psi_{2,2} & \lambda_1 \psi_{1,2} \psi_{2,1} + \lambda_2 \psi_{1,1} \psi_{2,2} \end{pmatrix}.$$

From equation (17), we have

$$T_1(\lambda, \lambda_1, \lambda_2) = \lambda I - M = \frac{1}{\Delta_1} \begin{pmatrix} \lambda \Delta_1 - \begin{vmatrix} \psi_{2,1} & \lambda_1 \psi_{1,1} \\ \psi_{2,2} & \lambda_2 \psi_{1,2} \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} \psi_{1,1} & \lambda_1 \psi_{1,1} \\ \psi_{1,2} & \lambda_2 \psi_{1,2} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \psi_{2,1} & \lambda_1 \psi_{2,1} \\ \psi_{2,2} & \lambda_2 \psi_{2,2} \end{vmatrix} & \lambda \Delta_1 + \begin{vmatrix} \psi_{1,1} & \lambda_1 \psi_{2,1} \\ \psi_{1,2} & \lambda_2 \psi_{2,2} \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\lambda I - M = \lambda I + t_0^{[1]} = \frac{1}{\Delta_1} \begin{pmatrix} \lambda \Delta_1 - \begin{vmatrix} \psi_{2,1} & \lambda_1 \psi_{1,1} \\ \psi_{2,2} & \lambda_2 \psi_{1,2} \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} \psi_{1,1} & \lambda_1 \psi_{1,1} \\ \psi_{1,2} & \lambda_2 \psi_{1,2} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \psi_{2,1} & \lambda_1 \psi_{2,1} \\ \psi_{2,2} & \lambda_2 \psi_{2,2} \end{vmatrix} & \lambda \Delta_1 + \begin{vmatrix} \psi_{1,1} & \lambda_1 \psi_{2,1} \\ \psi_{1,2} & \lambda_2 \psi_{2,2} \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

and the elements of the matrix are as follows:

$$(T_1)_{11} = \begin{vmatrix} \psi_{2,1} & \lambda_1 \psi_{1,1} \\ \psi_{2,2} & \lambda_2 \psi_{1,2} \end{vmatrix} - \lambda \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ \psi_{1,1} & \psi_{2,1} & \lambda_1 \psi_{1,1} \\ \psi_{1,2} & \psi_{2,2} & \lambda_2 \psi_{1,2} \end{vmatrix},$$

$$(T_1)_{12} = - \begin{vmatrix} \psi_{1,1} & \lambda_1 \psi_{1,1} \\ \psi_{1,2} & \lambda_2 \psi_{1,2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \psi_{1,1} & \psi_{2,1} & \lambda_1 \psi_{1,1} \\ \psi_{1,2} & \psi_{2,2} & \lambda_2 \psi_{1,2} \end{vmatrix},$$

$$(T_1)_{21} = \begin{vmatrix} \psi_{2,1} & \lambda_1 \psi_{2,1} \\ \psi_{2,2} & \lambda_2 \psi_{2,2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \psi_{1,1} & \psi_{2,1} & \lambda_1 \psi_{2,1} \\ \psi_{1,2} & \psi_{2,2} & \lambda_2 \psi_{2,2} \end{vmatrix},$$

$$(T_1)_{22} = - \begin{vmatrix} \psi_{1,1} & \lambda_1 \psi_{2,1} \\ \psi_{1,2} & \lambda_2 \psi_{2,2} \end{vmatrix} - \lambda \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \lambda \\ \psi_{1,1} & \psi_{2,1} & \lambda_1 \psi_{2,1} \\ \psi_{1,2} & \psi_{2,2} & \lambda_2 \psi_{2,2} \end{vmatrix},$$

And we get (19). Further substituting (17) into (20a), we obtain

$$t_{0x}^{[1]} + \lambda A_0 - i\lambda^2 \sigma_3 + \lambda t_0^{[1]} \sigma_3 + t_0^{[1]} A_0 = -i\lambda^2 \sigma_3 + \lambda A_0^{[1]} - i\lambda \sigma_3 t_0^{[1]} + A_0^{[1]} t_0^{[1]}. \quad (24)$$

Comparing the coefficients of  $\lambda^i$  ( $i = 0, 1, 2$ ) of the two sides of the equation (24), we get

$$\lambda^0 : \quad t_{0x}^{[1]} + t_0^{[1]} A_0 = A_0^{[1]} t_0^{[1]}. \quad (25a)$$

$$\lambda^1 : \quad A_0 - i t_0^{[1]} \sigma_3 = A_0^{[1]} - i \sigma_3 t_0^{[1]}. \quad (25b)$$

$$\lambda^2 : \quad -i \sigma_3 I = -i \sigma_3 I \quad (25c)$$

From (25b) we obtain the first identity (21). Further substituting the elements of the matrices  $A_0, t_0^{[1]}, \sigma_3$ , we obtain the solution of equation (1), (2) in the form (22).

Thus Theorem 1 is proved.

In same way theorem 1 we can formulate the next theorem.

*Theorem 2.* The two-fold DT of the (1+1)-dimensional nonlocal focusing nonlinear Schrödinger equation is

$$T_2(\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = \lambda^2 I + \lambda t_1^{[2]} + t_0^{[2]} = \frac{1}{\Delta_2} \begin{pmatrix} (T_2)_{11} & (T_2)_{12} \\ (T_2)_{21} & (T_2)_{22} \end{pmatrix}, \quad (26)$$

$$(T_2)_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda & 0 & \lambda^2 \\ \psi_{1,1} & \psi_{2,1} & \lambda_1 \psi_{1,1} & \lambda_1 \psi_{2,1} & \lambda_1^2 \psi_{1,1} \\ \psi_{1,2} & \psi_{2,2} & \lambda_2 \psi_{1,2} & \lambda_2 \psi_{2,2} & \lambda_2^2 \psi_{1,2} \\ \psi_{1,3} & \psi_{2,3} & \lambda_3 \psi_{1,3} & \lambda_3 \psi_{2,3} & \lambda_3^2 \psi_{1,3} \\ \psi_{1,4} & \psi_{2,4} & \lambda_4 \psi_{1,4} & \lambda_4 \psi_{2,4} & \lambda_4^2 \psi_{1,4} \end{pmatrix}, \quad (T_2)_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \lambda & 0 \\ \psi_{1,1} & \psi_{2,1} & \lambda_1 \psi_{1,1} & \lambda_1 \psi_{2,1} & \lambda_1^2 \psi_{1,1} \\ \psi_{1,2} & \psi_{2,2} & \lambda_2 \psi_{1,2} & \lambda_2 \psi_{2,2} & \lambda_2^2 \psi_{1,2} \\ \psi_{1,3} & \psi_{2,3} & \lambda_3 \psi_{1,3} & \lambda_3 \psi_{2,3} & \lambda_3^2 \psi_{1,3} \\ \psi_{1,4} & \psi_{2,4} & \lambda_4 \psi_{1,4} & \lambda_4 \psi_{2,4} & \lambda_4^2 \psi_{1,4} \end{pmatrix},$$

$$(T_2)_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ \psi_{1,1} & \psi_{2,1} & \lambda_1 \psi_{1,1} & \lambda_1 \psi_{2,1} & \lambda_1^2 \psi_{2,1} \\ \psi_{1,2} & \psi_{2,2} & \lambda_2 \psi_{1,2} & \lambda_2 \psi_{2,2} & \lambda_2^2 \psi_{2,2} \\ \psi_{1,3} & \psi_{2,3} & \lambda_3 \psi_{1,3} & \lambda_3 \psi_{2,3} & \lambda_3^2 \psi_{2,3} \\ \psi_{1,4} & \psi_{2,4} & \lambda_4 \psi_{1,4} & \lambda_4 \psi_{2,4} & \lambda_4^2 \psi_{2,4} \end{pmatrix}, \quad (T_2)_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \lambda & \lambda^2 \\ \psi_{1,1} & \psi_{2,1} & \lambda_1 \psi_{1,1} & \lambda_1 \psi_{2,1} & \lambda_1^2 \psi_{2,1} \\ \psi_{1,2} & \psi_{2,2} & \lambda_2 \psi_{1,2} & \lambda_2 \psi_{2,2} & \lambda_2^2 \psi_{2,2} \\ \psi_{1,3} & \psi_{2,3} & \lambda_3 \psi_{1,3} & \lambda_3 \psi_{2,3} & \lambda_3^2 \psi_{2,3} \\ \psi_{1,4} & \psi_{2,4} & \lambda_4 \psi_{1,4} & \lambda_4 \psi_{2,4} & \lambda_4^2 \psi_{2,4} \end{pmatrix},$$

where

$$\Delta_2 = \begin{pmatrix} \psi_{1,1} & \psi_{2,1} & \lambda_1 \psi_{1,1} & \lambda_1 \psi_{2,1} \\ \psi_{1,2} & \psi_{2,2} & \lambda_2 \psi_{1,2} & \lambda_2 \psi_{2,2} \\ \psi_{1,3} & \psi_{2,3} & \lambda_3 \psi_{1,3} & \lambda_3 \psi_{2,3} \\ \psi_{1,4} & \psi_{2,4} & \lambda_4 \psi_{1,4} & \lambda_4 \psi_{2,4} \end{pmatrix}$$

$T_2$  satisfies the following equations

$$T_{2x} + T_2 A = A^{[2]} T_2, \quad (27a)$$

$$T_{2t} + T_2 B = B^{[2]} T_2. \quad (27b)$$

From formula (27) we obtain

$$A_0^{[2]} = A_0 + [\sigma_3, t_0^{[2]}]. \quad (28)$$

Then the  $q^{[2]}, q^{*[2]}$  solutions of the system (1)-(2) have the form

$$q^{[2]} = q - 2i \frac{(T_2)_{12}}{\Delta_2}, \quad q^{*[2]} = q^* - 2i \frac{(T_2)_{21}}{\Delta_2}. \quad (29)$$

We can find the transformation  $T_2$  which satisfies the following property

$$T_2(\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \Big|_{\lambda=\lambda_i} \begin{pmatrix} \psi_{1,i} \\ \psi_{2,i} \end{pmatrix} = 0, \quad i=1, 2, 3, 4. \quad (30)$$

The proof of Theorem 2 is analogous to Theorem 1.

Thus we gave determinant representations are given for one-fold and two-fold DT for the (1+1)-dimensional nonlocal focusing nonlinear Schrödinger equation (1)-(2).

### Conclusion

In this paper, we have constructed the DT for the (1+1)-dimensional nonlocal focusing nonlinear Schrödinger equation. Using the derived DT, some exact solutions like, the soliton solution will obtained. The determinant representations are given for one-fold and two-fold DT for the (1+1)-dimensional nonlocal focusing nonlinear Schrödinger equation. It is interesting to note that the rogue wave soliton of nonlinear equations are currently one of the hottest topics in nonlinear physics and mathematics. The application of the obtained solutions in physics is an interesting subject. In particular, wave hope that the presented solutions may be used in experiments or optical fibre communication. Also we will study some important generalizations of the (1+1)-dimensional nonlocal focusing nonlinear Schrödinger equation in future [10]-[16].

### REFERENCES

- [1] Zhunussova Zh. Kh., Yesmakhanova K. R., Tungushbaeva D. I., Mamyrbekova G. K., Nugmanova G. N., Myrzakulov R. Integrable Heisenberg Ferromagnet Equations with self-consistent potentials// [arXiv:1301.1649].
- [2] L.H. Wang, K. Porsezian, J.S. He. Breather and Rogue Wave solutions of a Generalized Nonlinear Schrödinger Equation// Phys. Rev. E. **2013**. V.87. P.053202, [arXiv:1304.8085].
- [3] Jingsong He, Shuwei Xu, K. Porsezian. N-order bright and dark rogue waves in a Resonant erbium-doped Fibre system// Phys. Rev. E. **2012**. V.86. P.066603.
- [4] Shuwei Xu, Jingsong He. The Rogue Wave and breather solution of the Gerdjikov-Ivanov equation// arXiv:1109.3283.
- [5] Jingsong He, Shuwei Xu, Yi Cheng. The rational solutions of the mixed nonlinear Schrodinger equation// arXiv:1407.6917.
- [6] Ablowitz M.J., Musslimani Z.H. Integrable Nonlocal Nonlinear Schrodinger Equation. Physical Review Letters, **2013**, V. 110, №6. -P. 064105.
- [7] Gadzhimuradov T. A., Agalarov A. M. Towards a gauge-equivalent magnetic structure of the nonlocal nonlinear Schrodinger equation// Physical Review A. **2016**. V. 93. P. 062124.
- [8] Gadzhimuradov T. A., Agalarov A. M. Gauge equivalence of nonlocal NLSE and PT-symmetric Heisenberg ferromagnetic equation. <https://www.researchgate.net/publication/305721244>.
- [9] Li-Yuan Ma, Zuo-Nong Zhu. Nonlocal nonlinear Schrodinger equation and its discrete version: Soliton solutions and

gauge equivalence// Journal of Mathematical Physics. –2016, –V.57, –P.083507; doi: <http://dx.doi.org/10.1063/1.4960818>.

[10] El-Ganainy R., Makris K. G., Christodoulides D. N., Musslimani Z. H. Theory of coupled optical PT-symmetric structures// Optics Letters Vol. **2007**. V. 32, Issue 17. -P. 2632-2634.

[11] Regensburger A., Bersch C., Miri M.A., Onishchukov G., Christodoulides D. N., Peschel U. Parity-time synthetic photonic lattices. Nature, (London). **2012**. V. 488, P. 167.

[12] Li-Yuan Ma, Zuo-Nong Zhu. Nonlocal nonlinear Schrodinger equation and its discrete version: soliton solutions and gauge equivalence// DOI: 10.1063/1.4960818 Cite as: arXiv:1503.06909 [nlin.SI].

[13] Chuazhong Li, Jingsong He, K. Porsezian, Rogue waves of the Hirota and the Maxwell-Bloch equations// Physical Review E. **2013**. V.87. P.012913. [arXiv:1205.1191].

[14] Jieming Yang, Chuazhong Li, Tiantian Li, Zhaoneng Cheng, Darboux transformation and solutions of the two-component Hirota-Maxwell-Bloch system. Chin. Phys Lett. **2013**. V.30, №10. P. 104201. arXiv:1310.0617.

[15] Chuazhong Li, Jingsong He. Darboux transformation and positons of the inhomogeneous Hirota and the Maxwell-Bloch equation. Commun. Theor. Phys. **2002**. V.38. P. 493-496. [arXiv:1210.2501].

[16] Jingsong He, Ling Zhang, Yi Cheng, Yishen Li. Determinant representation of Darboux transformation for the AKNS system// Science in China Series A: Mathematics. **2006**. V.49. № 12. P. 1867-1878.

**А.М. Сергазина, К.Р. Есмаханова, К.К. Ержанов, Д.И. Тунгушбаева**

Л.Н. Гумилев атындағы Евразиялық Ұлттық Университеті, Астана қ., 010008, Қазақстан

### **(1+1)-ӨЛШЕМДІ ЛОКАЛДЫ ЕМЕС ФОКУСТАЛҒАН СЫЗЫҚТЫ ЕМЕС ШРЕДИНГЕР ТЕНДЕУІ ҮШІН ДАРБУ ТҮРЛЕНДІРУІ**

**Аннотация.** Осы мақалада біз (1+1)-өлшемді локалды емес фокусталған сызықты емес Шредингер тендеуін қарастырдық. Бұл тендеулерді M.J. Ablowitz and Ziad H. Musslimani, Li-Yuan Ma, Zuo-Nong Zhu, T. A. Gadzhimuradov A. M. Agalarov және т.б. ғалымдар зерттеді. Локалды емес фокусталған сызықты емес Шредингер тендеуі кері шашырау әдісімен интегралданады. Біз осы тендеуге Дарбу түрлендіруін құрдық. Сонымен қатар, біз (1+1)-өлшемді локалды емес фокусталған сызықты емес Шредингер тендеуі үшін бір және екі ретті анықтауыш түріндегі Дарбу түрлендіруін алдық. Осы тендеудің трансформациясын қолдану ретінде, солитондық түрдегі шешімдерді тривиалды «seed» шешімнен аламыз.

**Тірек сөздер:** (1+1)-өлшемді локалды емес фокусталған сызықты емес Шредингер тендеуі, интегралданатын жүйе, Лакс жұбы, Дарбу түрлендіруі, анықтауыш түріндегі бір және екі-еселі Дарбу түрлендіруі.

УДК 517.957, 517.958

**А.М. Сергазина, К.Р. Есмаханова, К.К. Ержанов, Д.И. Тунгушбаева**

Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан  
[kryesmakhanova@gmail.com](mailto:kryesmakhanova@gmail.com)

### **ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДАРБУ ДЛЯ (1+1)-МЕРНОГО НЕЛОКАЛЬНОГО ФОКУСИРОВАННОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА**

**Аннотация.** В этой статье мы рассмотрим (1+1)-мерное нелокальное фокусированное нелинейное уравнение Шредингера. Эти уравнения изучаются в работах M.J. Ablowitz and Ziad H. Musslimani, Li-Yuan Ma, Zuo-Nong Zhu, T. A. Gadzhimuradov A. M. Agalarov и др. Нелокальное нелинейное уравнение Шредингера интегрируется с методами обратные задачи рассеяния. Мы построили преобразование Дарбу этого уравнения. Кроме того, мы получим представление детерминанта однократного и двукратного преобразования Дарбу для (1+1)-мерного нелокального фокусированного уравнения Шредингера. В качестве применения Дарбу преобразования этого уравнения типа солитонного решения получаются из тривиальных «seed» решений.

**Ключевые слова:** (1+1)-мерное нелокальное фокусированное нелинейное уравнение Шредингера, интегрируемые системы, пара Лакса, представление детерминанта одно и двух-кратного преобразования Дарбу.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 6, Number 316 (2017), 22 – 26

**E. Boos**, T. Temiraliev, M. Izbasarov, B. Zhautykov,  
V. Samoilov, N. Pokrovsky, R. Tursunov

Physics and Technology Institute, Almaty, Kazakhstan

\*temturt@mail.ru

## ANGLE CORRELATIONS OF SECONDARY CHARGED PARTICLES IN THE REACTIONS OF ANTI- PROTON-PROTON ANNIHILATION AT 32 GEV/S

**Abstract.** For discovering of the couple particles for correlations of the same azimuthal angles but sharply differing an quantity (value) at pseudorapidity experimental data with exceptionally large multiplicity ( $n=8,10,\geq 12$ ) in antiproton-proton annihilation are analyzed.

Experimental data on antiproton-proton annihilation have been obtained in International Collaboration “Mirabelle”. Analysis of the dependence for azimuthal angles difference  $\phi_{ik} = \phi_i - \phi_k$  between  $i$ -th and  $k$ -th particles and their rapidity  $\Delta y = y_i - y_k$  (where  $i=1,2,\dots,n$ ;  $i \neq k$  at number of secondary  $n$ ). Azimuthal angle  $\phi$  of secondary particle is determined as angle between initial plane, contained longitudinal momenta of primary. The rapidity of particle calculate on  $y = \frac{1}{2} \ln \frac{E + P_{||}}{E - P_{||}}$  form, where  $E, P_{||}$  are energy and longitudinal momentum.

Analysis of dependence azimuthal angle of two particles from the rapidity difference  $\Delta y$  the same particles for multiplicity  $n=8, n=10, n \geq 12$  was shown, that the correlations of couples at  $\Delta\phi=0, \Delta y=0$  are observed, but far couple (pair) correlations of charged particles in  $\Delta y=2/4$  interval, observed on Big Hadron Collider are not observed. The  $\Delta y$  distribution described by Gauss function and  $\Delta\phi$  distribution has symmetrical view, describing by linear relation

$$\frac{\Delta N}{N \Delta\phi} = a + b\phi.$$

**Key Words:** meson, proton, antiproton, annihilation.

УДК 539.12

**Э.Г. Боос**, Т. Темиральев\*, М. Избасаров,  
Б.О. Жаутыков, В.В. Самойлов, Н.С. Покровский, Р.А. Турсунов

Физико-технический институт, Алматы, Казахстан

## УГЛОВЫЕ КОРРЕЛЯЦИИ ВТОРИЧНЫХ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В РЕАКЦИЯХ АНТИПРОТОН- ПРОТОННОЙ АННИГИЛЯЦИИ ПРИ 32 ГЭВ/С

**Аннотация.** Для обнаружения дальних корреляций пар частиц при одинаковых азимутальных углах, но резко отличающихся по величине быстрой, анализируются экспериментальные данные с предельно большой множественностью ( $n=8, 10, \geq 12$ ) в антипротон – протонной аннигиляции при 32 ГэВ/с. Экспериментальные данные по взаимодействиям антипротонов с протонами получены в рамках Международного сотрудничества «Мирабель».

Проведен анализ зависимости разности азимутальных углов  $\varphi_{ik} = \varphi_i - \varphi_k$  между  $i$ -той и  $k$ -ой частицами и их быстройми  $\Delta y = y_i - y_k$  (где  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ ;  $i \neq k$  при числе вторичных частиц  $n$ ). Азимутальный угол  $\varphi$  вторичной частицы определяется как угол между начальной плоскостью, содержащей продольный импульс вторичных частиц и импульс первичной частицы, и плоскостью, перпендикулярной направлению движения первичной частицы. Быстрота частицы вычисляется по формуле  $y = \frac{1}{2} \ln \frac{E + P_{\parallel}}{E - P_{\parallel}}$ , где  $E$ ,  $P_{\parallel}$  – энергия и продольный импульс.

Анализ зависимости разности азимутального угла  $\Delta\varphi$  двух частиц от разности быстройми  $\Delta y$  этих частиц для множественностей  $n = 8, n = 10, n \geq 12$  показал, что наблюдаются корреляции пар частиц при  $\Delta\varphi = 0$ ,  $\Delta y = 0$ , но не наблюдаются дальние парные корреляции заряженных частиц в интервале  $\Delta y = 2 \div 4$ , обнаруженные в экспериментах на Большом адронном коллайдере.

Распределение  $\Delta y$  описывается функцией Гаусса, а распределение  $\Delta\varphi$  имеет симметричный вид, описывающейся линейной зависимостью вида  $\frac{\Delta N}{N\Delta\varphi} = a + b\varphi$ .

**Ключевые слова:** мезон, протон, антипротон, аннигиляция.

В экспериментах на встречных пучках протонов и ядер [1-3] наблюдались дальние корреляции пар частиц при одинаковых азимутальных углах, но резко отличающихся по величине квазибыстройми в области энергии, достижимой на Большом адронном коллайдере (*LHC*). Природа (механизм) дальней корреляции еще не известна. В этой связи представляет интерес анализ экспериментальных данных с предельно большой множественностью ( $n = 8, 10, \geq 12$ ) в антипротон – протонной аннигиляции при 32 ГэВ/с.

Взаимодействия антипротонов с протонами регистрировались на французской водородной пузырьковой камере «Мирабель» при экспонировании пучком антипротонов на Серпуховском ускорителе  $У - 70$  (Россия). Экспериментальный материал получен в рамках Международного сотрудничества под эгидой Института физики высоких энергий (Серпухов, Россия).

В сотрудничестве на примерно 200 тысяч событиях полностью измерены угловые и энергетические характеристики вторичных частиц. Среди этих неупругих взаимодействий обнаружено 47376 событий антипротон – протонной аннигиляции  $\bar{p}p \rightarrow m(\pi^+\pi^-)X^0$ , где  $m$  – число  $\pi^+\pi^-$  пар и  $X^0$  – вклад нейтральных частиц.

Азимутальный угол  $\varphi$  вторичной частицы определяется как угол между начальной плоскостью, содержащей продольный импульс вторичных частиц и импульс первичной частицы, и плоскостью, перпендикулярной направлению движения первичной частицы. Быстрота частиц вычисляется по формуле

$$y = \frac{1}{2} \ln \frac{E + P_{\parallel}}{E - P_{\parallel}},$$

где  $E, P_{\parallel}$  – энергия и продольный импульс.

На рис. 1 приведены зависимости быстройми  $y$  от азимутального угла  $\varphi$  вторичных частиц в реакции антипротон – протонной аннигиляции для множественностей  $n = 8, n = 10, n = 12$ , а также распределения переменных  $\varphi$  и  $y$  при импульсе антипротона 32 ГэВ/с. Распределения частиц по азимутальному углу построены с шириной интервала 0,2618 радиан, что соответствует углу  $15^\circ$ , а ширина интервала быстройми равна 0,25. Средние значения величин  $\varphi$  и  $y$  и их дисперсии приведены в таблице 1. Распределения частиц по азимутальному углу становятся более изотропными с увеличением множественности, а распределения по быстройми имеют форму распределения Гаусса.

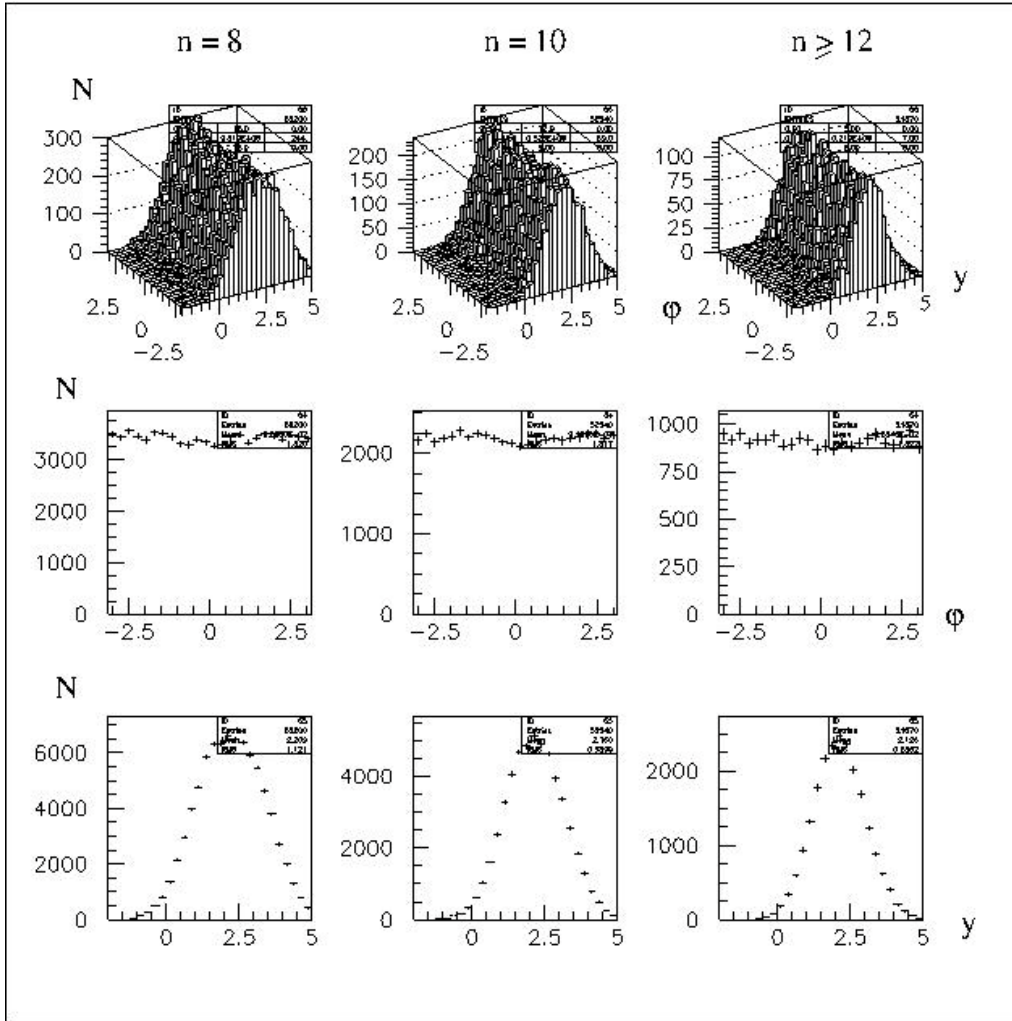


Рисунок 1 – Зависимость быстроты  $y$  от азимутального угла  $\varphi$  и распределения  $\varphi$  и  $y$  в аннигиляционном канале при 32 ГэВ/с

Таблица 1 – Количество событий  $N$ , средние значения  $\langle\varphi\rangle$  и  $\langle y\rangle$  дисперсии  $D_\varphi, D_y$  в событиях антипротон – протонной аннигиляции при 32 ГэВ/с.

Множественность $n$	$N$	$n \cdot N$	$\langle\varphi\rangle$	$D_\varphi$	$\langle y\rangle$	$D_y$
8	10275	82200	$-0,66 \cdot 10^{-2}$	1,820	$2,209 \pm 0,016$	1,121
10	5254	52540	$-0,16 \cdot 10^{-3}$	1,817	$2,160 \pm 0,018$	0,990
12	1727	21870	$-0,88 \cdot 10^{-3}$	1,822	$2,126 \pm 0,028$	0,886

Проведен анализ зависимости разности азимутальных углов  $\Delta\varphi_{ik} = \varphi_i - \varphi_k$  между  $i$ -ой и  $k$ -ой частицами и их быстротами  $\Delta y_{ik} = y_i - y_k$ , где  $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $k = 1, 2, \dots, n$ ;  $i \neq k$  при числе вторичных частиц  $n$ . На рис. 2 приведены зависимости разности быстрот  $\Delta y_{ik}$  двух частиц от разности азимутальных углов  $\Delta\varphi_{ik}$  этих частиц и распределения  $\Delta\varphi_{ik}$  и  $\Delta y_{ik}$  для множественностей  $n = 8, n = 10, n \geq 12$ . Количество пар в событии равно  $n(n-1)/2$ , где  $n$  – число частиц в событии. Средние значения величин  $\Delta y_{ik}$  и  $\Delta\varphi_{ik}$  и их дисперсии приведены в таблице 2.



Таблица 2 – Количество событий N, средние значения  $\langle \Delta\varphi \rangle$  и  $\langle \Delta y \rangle$  дисперсии  $D_{\Delta\varphi}, D_{\Delta y}$  при 32 ГэВ/с.

Множественность n	N	$\frac{n(n-1)}{2} \cdot N$	$\langle \Delta\varphi \rangle$	$D_{\Delta\varphi}$	$\langle \Delta y \rangle$	$D_{\Delta y}$
8	10275	287700	$-0,168 \cdot 10^{-2}$	1,328	-0,271	1,626
10	5254	236430	$-0,300 \cdot 10^{-2}$	1,316	-0,134	1,438
12	1727	125087	$-0,207 \cdot 10^{-2}$	1,312	$-0,504 \cdot 10^{-1}$	1,277

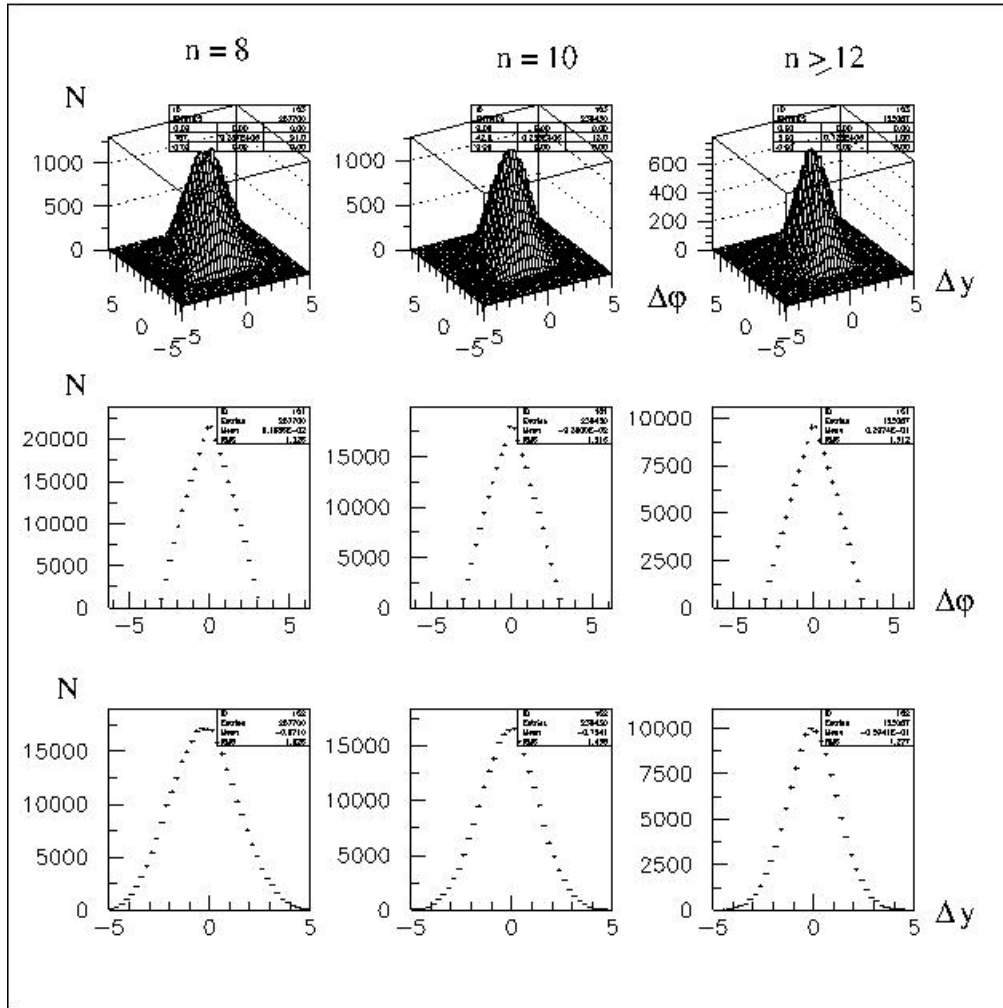


Рисунок 2 – Зависимость  $\Delta y$  от  $\Delta\varphi$  и распределения  $\Delta y$  и  $\Delta\varphi$  в антипротон – протонной аннигиляции при 32 ГэВ/с

Из экспериментальных данных можно заключить, что наблюдаются корреляции пар частиц при  $\Delta\varphi = 0, \Delta y = 0$ , но не наблюдаются дальние парные корреляции заряженных частиц в интервале  $\Delta y = 2 \div 4$ , обнаруженные в экспериментах БАК. Распределение  $\Delta y$  описывается функцией Гаусса, а распределение  $\Delta\varphi$  имеет симметричный вид, описывающейся линейной зависимости вида  $\frac{\Delta N}{N \Delta\varphi} = a + b \Delta\varphi$ , где при множественности  $n = 8, n = 10, n \geq 12$  соответствующие значения величины a и b совпадают, а усредненные значения равны  $a = 0.290 \pm 0.003, b = 0.081 \pm 0.005$ .

При изотропном распределении  $\Delta\varphi$  максимальная плотность распределения частиц  $(\frac{dW}{d\Delta\varphi})_{\max} = \frac{1}{2\pi} = \frac{1}{6.28} = 0.16$  значительно меньше экспериментального значения  $(\frac{dW}{d\Delta\varphi_{ik}})_{\max} = 0.290 \pm 0.003$ , т.е. количественно экспериментальные данные существенно расходятся с моделью изотропного и независимого вылета вторичных частиц.

Это отличие может являться важным экспериментальным критерием для выбора физической модели мягкой адронизации кварков в антипротон-протонных взаимодействиях.

Работа выполнена в рамках программы № 0228-ПЦФ-14 «Развитие физики высоких энергий, космических лучей и их практических приложений в Республике Казахстан на 2015-2017 годы» по приоритету «Интеллектуальный потенциал страны».

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Chatzchyan S., Khachatryan V. et al.//JHEP V.9 p.91 (2010).
- [2] Chatzchyan S., Khachatryan V. et al.//Phys.Lett. B718 p.795 (2013).
- [3] Chatzchyan S., Khachatryan V. et al.// JHEP V.7 p.76 (2011).

**Э.Г. Боос, Т. Темиралиев\*, М. Избасаров,  
В.В. Самойлов, Н.С. Покровский, Р.А. Турсунов**

Физика-техникалық институты, Алматы, Қазақстан

#### ИМПУЛЬСІ 32 ГЭВ/С АНТИПРОТОН-ПРОТОНДЫҚ АННИГИЛЯЦИЯЛЫҚ РЕАКЦИЯСЫНДА ЕКІНШІ РЕТТІК ЗАРЯДТАЛҒАН БӨЛШЕКТЕРДІҢ БҰРЫШТЫҚ КОРРЕЛЯЦИЯСЫ

**Аннотация.** Импульсі 32 ГэВ/с антипротон-протондық аннигиляциясында азимуталдық бұрыштары бірдей, бірақ тездік шамасы бойынша айқын айырмашылығы бар жұп бөлшектердің алыс корреляциясын табу үшін көптігі өте жоғары ( $n=8, 10, \geq 12$ ) тәжірибелік деректер талданады. Антипротондардың протондармен эрекеттестігі бойынша тәжірибелік деректер «Мирабель» Халықаралық бірлестіктің аясында алынды.

$i$  және  $k$  бөлшектерінің арасындағы азимуталдық бұрыштардың  $\varphi_{ik} = \varphi_i - \varphi_k$  айырмасының олардың тездіктерінің  $\Delta u = u_i - u_k$  ( $i=1,2,\dots,n, n=1,2,\dots,n; i \neq k$ , екінші реттік бөлшектердің саны  $n$ ) айырмасына тәуелділігі зерттелінді. Екінші реттік бөлшектің азимуталдық бұрышы құрамында екінші реттік бөлшектердің бойлық импульсі және алғашқы бөлшектің импульсі бар бастапқы жазықтықпен алғашқы бөлшектің қозғалысына перпендикуляр жазықтықтың арасындағы бұрыш ретінде анықталады. Бөлшектің тездігі келесі формула арқылы есептелінеді  $u = \frac{1}{2} \ln \frac{E+P_{\parallel}}{E-P_{\parallel}}$ ,  $E, P_{\parallel}$ -энергиясы және бойлық импульсі.

Көптіктері  $n=8, 10, \geq 12$  үшін екі бөлшектің азимуталдық бұрыштарының айырмасының  $\Delta\varphi$  осы бөлшектердің тездіктерінің айырмасына  $\Delta u$  тәуелділігін талдау,  $\Delta\varphi=0, \Delta u=0$  аймағында жұп бөлшектердің корреляциясы бар екенін көрсетеді, бірақ  $\Delta u=2 \div 4$  аралығында, үлкен адрондық коллайдерде анықталған, зарядталған бөлшектердің алыс жұптық корреляциясы байқалмайды.

$\Delta u$  үлестірілімі Гаусс функциясымен сипатталады, ал  $\Delta\varphi$  үлестірілімінің түрі симметриялы, ол сызықтық тәуелділікпен  $\frac{\Delta N}{N\Delta\varphi} = a + b\varphi$  сипатталады.

**Тірек сөздер:** мезон, протон, антипротон, аннигиляция.

## NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN  
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 6, Number 316 (2017), 27 – 38

**К.А. Boshkayev<sup>1,2</sup>, В.А. Zhami<sup>1</sup>, Zh.A. Kalymova<sup>1</sup>, Zh.N. Brisheva<sup>1</sup>**<sup>1</sup>IETP, Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, 050040, Kazakhstan<sup>2</sup>ICRANet, Piazza della Repubblica 10, Pescara, I-65122, ItalyE-mail: [kuantay@mail.ru](mailto:kuantay@mail.ru)**STATIC WHITE DWARFS TAKING INTO ACCOUNT THE EFFECTS  
OF FINITE TEMPERATURES AND GENERAL RELATIVITY**

**Abstract.** Cold and hot white dwarfs are investigated in the framework of the general relativity using the Chandrasekhar equation of state. Basic parameters of white dwarfs such as the central density, pressure, mass, radius, the temperature of an isothermal core and logarithm of surface gravity have been calculated. It has been shown that it is necessary to take into account the effects of finite temperatures in white dwarfs with low masses. The consideration of the effects of temperature can explain observational data from Sloan Digital Sky Survey Data Release 4. Additionally, the core temperatures have been estimated for white dwarfs – satellites of the millisecond pulsars PSR J1738 + 0333, PSR J1012 + 5307 and PSR J1911-5958A.

**Key words:** white dwarfs, general relativity, effects of temperature, observational data.

**К.А. Бошкаев<sup>1,2</sup>, В.А. Жами<sup>1</sup>, Ж.А. Калымова<sup>1</sup>, Ж.Н. Бришева<sup>1</sup>**<sup>1</sup>НИИЭТФ, КазНУ имени Аль-Фараби, Алматы, 050040, Казахстан;<sup>2</sup>ICRANet, Piazza della Repubblica 10, Pescara, I-65122, Italy**СТАТИЧЕСКИЕ БЕЛЫЕ КАРЛИКИ С УЧЕТОМ ЭФФЕКТОВ  
КОНЕЧНЫХ ТЕМПЕРАТУР И ОБЩЕЙ ТЕОРИИ  
ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ**

**Аннотация.** В работе исследуются холодные и горячие белые карлики в рамках общей теории относительности с применением уравнения состояния Чандрасекара. Были вычислены основные параметры белых карликов, такие как центральная плотность, давление, масса, радиус, температура изотермического ядра и логарифм поверхностной гравитации. Также была показана необходимость учета эффектов конечных температур в маломассивных белых карликах. Учет температуры может объяснить наблюдательные данные из выпуска данных Слоановского Цифрового Небесного Обзора. В дополнении, были оценены температуры ядер белых карликов – спутников миллисекундных пульсаров PSR J1738+0333, PSR J1012+5307 и PSR J1911-5958A.

**Ключевые слова:** белые карлики, общая теория относительности, эффекты конечных температур, наблюдательные данные.

**1 Введение.** Компактные объекты представляют собой конечные продукты звездной эволюции и делятся на три основных типа: белые карлики (БК), нейтронные звезды (НЗ) и черные дыры (ЧД), за исключением экзотических и в то же время гипотетических объектов, как кварковые звезды, бозонные звезды, кротовые норы и т.д. Эти объекты называются компактными из-за большой массы и малого размера и соответственно, высокой плотности. Считается, что начальная масса является ключевым фактором, определяющим конечный тип звезды. Например, белые карлики образуются из легких звезд прародителей с массами  $M \approx (1 - 4) M_{\odot}$  [1], но верхний

предел массы статического холодного белого карлика без магнитного поля не превышает предел Чандрасекара  $M \leq 1.44M_{\odot}$  [2] (с магнитным полем значение массы может превысить данный предел [3], [4], [5]). Отношение гравитационного радиуса к фактическому радиусу объекта так называемый параметр компактности  $z = r_g / R$  для белых карликов имеет значение  $z \sim 0.001$ , для нейтронных звезд  $z \approx 0.3$ , для черных дыр  $z = 1$  [6], где  $r_g = 2GM/c^2$  гравитационный радиус,  $G$  – гравитационная постоянная,  $M$  – полная масса рассматриваемого объекта,  $c$  – скорость света в вакууме. То есть, чем объект компактнее, тем больше становится заметнее роль общей теории относительности (ОТО). Важность общей теории относительности в случае массивных белых карликов была наглядно показана в предыдущих работах [7, 8, 9, 10].

Одной из актуальных задач современной астрофизики является построение реальной физической модели компактных объектов, таких, как белые карлики и нейтронные звезды и т.д., которые могут объяснить наблюдательные данные. Следовательно, для этого все физические величины и явления должны быть полностью учтены в уравнениях состояния (УС) вещества и звездной структуры. В уравнениях звездной структуры были приняты во внимания эффекты общей теории относительности, то есть было использовано уравнение Толмана-Оппенгеймера-Волкова (ТОВ). Согласно работам [11] и [12] необходимо исследовать БК в общей теории относительности, чтобы проанализировать их устойчивость на поправки ОТО, хотя ими можно пренебречь для маломассивных БК.

В данной работе рассматриваются не только влияние эффектов ОТО на структуру белых карликов, но и роль эффектов конечных температур. Учет таких эффектов и физических параметров делают теорию белого карлика более реалистичной.

В настоящее время существуют три основных вида уравнений состояния для описания вырожденной материи БК: уравнение состояния Чандрасекара, уравнение состояния Салпитера и релятивистское уравнение состояния Фейнмана-Метрополиса-Теллера. Основные отличия, преимущества и недостатки, между этими уравнениями состояния подробно приведены в работе [8]. Следует также отметить, что политропные уравнения состояния являются предельным случаем уравнения состояния Чандрасекара или Салпитера в нерелятивистском и релятивистском пределах.

В статье рассматриваются горячие белые карлики с использованием уравнения состояния Чандрасекара, включая в него эффекты конечных температур. Аналогичный подход включения в релятивистское уравнение состояния Фейнмана-Метрополиса-Теллера влияния конечных температур рассматривали Ш. Карвальо и другие [12, 13, 14]. Для подтверждения достоверности данного подхода в конце работы теоретические результаты были сопоставлены с наблюдательными массами и радиусами от каталога белых карликов Слоановского Цифрового Небесного Обзора (Sloan Digital Sky Survey (SDSS)) [15, 16]. В отличие от работ Ш. Карвальо и др., в данной статье исследуется БК с помощью УС Чандрасекара, и Выпуск Данных 4 (Data Release 4 (DR 4)) SDSS, плюс новые источники (PSR J1012+5307, PSR J1911-5958A, PSR J1738+0333).

Структура статьи организована следующим образом: сначала в разделах 2 и 3 кратко рассматривается уравнение состояния Чандрасекара без учета и с учетом температуры; далее в разделе 4 приводится уравнение звездной структуры и равновесия для сферическо-симметричной звезды в общей теории относительности с переходом на классический предел. Затем, в разделе 5 рассматриваются белые карлики - компоненты миллисекундных пульсаров PSR J1738+0333, PSR J1012+5307 и PSR J1911-5958A, строятся зависимости: логарифма поверхностной гравитации от массы, логарифма поверхностной гравитации от радиуса, соотношения масса-радиус, совместно с наблюдательными данными определяются температуры ядер белых карликов. В заключении приводятся основные результаты и делаются соответствующие выводы.

**2 Уравнение состояния Чандрасекара при нулевой температуре.** Уравнение состояния вырожденного вещества белого карлика, в наипростейшем случае, определяет зависимость полного давления от полной плотности энергии. Вещество белых карликов состоит из электронов и положительно заряженных ионов (голых ядер). При этом электроны рассматриваются, как полностью вырожденный электронный газ и описываются статистикой Ферми-Дирака. В

приближении Chandrasekara распределение электронов, а также ионов предполагается локально постоянным. Следовательно, условие локальной нейтральности заряда задается как

$$n_e = \frac{Z}{A} n_N, \quad (1)$$

где  $n_e$  – концентрация электронов,  $Z$  – число протонов,  $A$  – средний атомный вес (массовое число),  $n_N$  – концентрация нуклонов. При полном вырождении заполнены все нижние энергетические уровни вплоть до некоторого максимального, называемого уровнем Ферми. Концентрация полного вырожденного электронного газа на уровне Ферми определяется как

$$n_e = \int_0^{p_e^F} \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} d^3 p = \frac{8\pi}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{p_e^F} p^2 dp = \frac{(p_e^F)^3}{3\pi^2\hbar^3}, \quad (2)$$

где  $p_e^F$  – импульс Ферми электрона,  $\hbar$  – приведенная постоянная Планка.

По Chandrasekaraу полное давление создается давлением электронов  $P_e$ , в то время как давление положительно заряженных ядер  $P_N$  несущественно, а плотность энергии определяется плотностью энергии ядер  $\varepsilon_N$ , в то время как плотность энергии вырожденных электронов  $\varepsilon_e$  пренебрежимо мала. Таким образом, УС Chandrasekara задается, как

$$\varepsilon_{Ch} = \varepsilon_N + \varepsilon_e \approx \varepsilon_N = \frac{A}{Z} M_u c^2 n_e, \quad (3)$$

$$P_{Ch} = P_N + P_e \approx P_e, \quad (4)$$

где  $M_u = 1.6604 \times 10^{-24} \text{ г}$  – атомная единица массы,  $\varepsilon_N$  – плотность энергии нуклонов,  $\varepsilon_e$  – плотность энергии электронов,  $P_N$  – давление нуклонов,  $P_e$  – давление электронов. Отношение атомного числа  $A$  к числу протонов  $Z$  обычно в литературе обозначается как  $\mu = A/Z$  и для простоты все расчеты в статье проводились принимая значение  $\mu = 2$ .

Полная плотность энергии электронов записывается в следующем виде, хотя она пренебрегается в УС Chandrasekara

$$\varepsilon_e = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{p_e^F} \sqrt{c^2 p^2 + m_e^2 c^4} 4\pi p^2 dp = \frac{m_e^4 c^5}{8\pi^2 \hbar^3} \left[ x_e \sqrt{1+x_e^2} (1+2x_e^2) - \text{arsh}(x_e) \right], \quad (5)$$

а полное давление электронов определяется как

$$P_e = \frac{1}{3} \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{p_e^F} \frac{c^2 p^2}{\sqrt{c^2 p^2 + m_e^2 c^4}} 4\pi p^2 dp = \frac{m_e^4 c^5}{8\pi^2 \hbar^3} \left[ x_e \sqrt{1+x_e^2} (2x_e^2/3 - 1) + \text{arsh}(x_e) \right], \quad (6)$$

где  $x_e = p_e^F / (m_e c)$  – безразмерный импульс Ферми электрона,  $m_e$  – масса электрона [8].

**3 Уравнение состояния Chandrasekara при конечных температурах.** В общем случае выражение для концентрации электронов следует из статистики Ферми-Дирака и она, при учете температуры, определяется как [17]

$$n_e = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty \frac{4\pi p^2 dp}{\exp\left[\frac{E(p) - \mu_e(p)}{k_B T}\right] + 1}, \quad (7)$$

где  $k_B = 1.38 \cdot 10^{-16} \text{ эрг} \cdot \text{К}^{-1}$  – постоянная Больцмана,  $\mu_e$  – химический потенциал,  $E(p) = \sqrt{c^2 p^2 + m_e^2 c^4} - m_e c^2$  – кинетическая энергия,  $p$  и  $m_e$  – импульс и масса покоя электрона соответственно.

Формула (2) с учетом эффектов конечных температур может быть записана в следующей альтернативной форме (см. Приложение А)

$$n_e = \frac{2\pi\sqrt{2}}{(2\pi\hbar)^3} m^3 c^3 \beta^{\frac{3}{2}} \left[ F_{\frac{1}{2}}(\eta, \beta) + \beta F_{\frac{3}{2}}(\eta, \beta) \right], \quad (8)$$

где

$$F_k(\eta, \beta) = \int_0^\infty \frac{t^k \sqrt{1 + (\beta/2)t}}{1 + e^{t-\eta}} dt \quad (9)$$

релятивистский интеграл Ферми-Дирака,  $\eta = \mu_e/(k_B T)$ ,  $t = E/(k_B T)$  и  $\beta = k_B T/m_e c^2$  параметры вырождения.

Следовательно, плотность энергии вырожденного электронного газа при конечных температурах выражается по формуле

$$\varepsilon_e = \frac{2^{3/2}}{3\pi^2 \hbar^3} m_e^4 c^5 \beta^{5/2} \left[ F_{3/2}(\eta, \beta) + \beta F_{5/2}(\eta, \beta) \right], \quad (10)$$

электронное давление при конечных температурах

$$P_e = \frac{\sqrt{2}}{\pi^2 \hbar^3} m_e^4 c^5 \beta^{5/2} \left[ F_{3/2}(\eta, \beta) + \frac{\beta}{2} F_{5/2}(\eta, \beta) \right]. \quad (11)$$

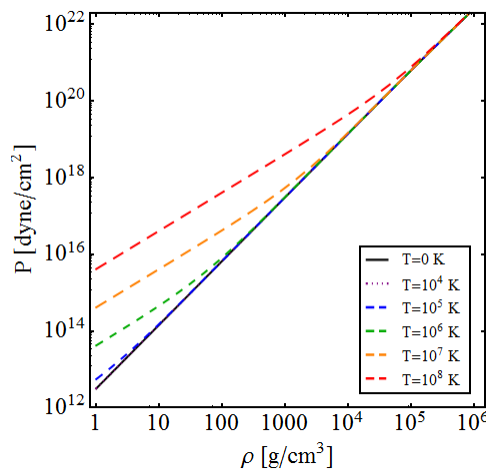


Рисунок 1 – Полное давление как функция полной плотности при значениях температур  $T = (0, 10^4, 10^5, 10^6, 10^7, 10^8) \text{ К}$

В рисунке 1 построена зависимость полного давления от полной плотности при различных температурах  $T = [0, 10^4, 10^5, 10^6, 10^7, 10^8]$  К. Как видно из рисунка, эффекты температуры существенны при малых плотностях. Влияние температуры становится заметнее начиная с температуры  $10^5$  К и оно растет с увеличением температуры при малых плотностях.

**4 Уравнение звездной структуры и равновесия.** Из сферически-симметричной метрики

$$ds^2 = e^{2\nu(r)} c^2 dt^2 - e^{2\lambda(r)} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (12)$$

уравнения звездной структуры могут быть записаны в форме Толмана-Оппенгеймера-Волкова [18],

$$\frac{d\nu(r)}{dr} = \frac{GM(r)}{c^2 r^2} \left( 1 + \frac{4\pi r^3 P(r)}{M(r)c^2} \right) \left( 1 - \frac{2GM(r)}{c^2 r} \right)^{-1}, \quad (13)$$

$$\frac{dP(r)}{dr} = -[\varepsilon(r) + P(r)] \frac{d\nu(r)}{dr}, \quad (14)$$

$$\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi r^2 \frac{\varepsilon(r)}{c^2}, \quad (15)$$

где  $e^{-2\lambda(r)} = 1 - 2GM(r)/(c^2 r)$ ,  $M(r)$  – масса вещества внутри белого карлика радиусом  $r$ ,  $\nu(r)$  – безразмерный гравитационный потенциал внутри БК, который связан с физическим потенциалом как  $\Phi(r) = c^2 \nu(r)$ ,  $\varepsilon(r) = c^2 \rho(r)$  – полная плотность энергии и  $P(r)$  – полное давление, определяемые через уравнения (3) и (4).

Из уравнений (13) и (15) полное давление можно записать в следующей форме

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\frac{GM(r)\rho(r)}{r^2} \left[ 1 + \frac{P(r)}{\rho(r)c^2} \right] \left( 1 + \frac{4\pi r^3 P(r)}{M(r)c^2} \right) \left( 1 - \frac{2GM(r)}{c^2 r} \right)^{-1}, \quad (16)$$

Это и есть уравнение Толмана-Оппенгеймера-Волкова, которое полностью определяет структуру сферически-симметричного тела, находящегося в гидростатическом равновесии. Подробный вывод уравнений можно найти в работе [18]. Если пренебречь членами порядка  $1/c^2$ , то уравнение ТОВ переходит на классический – ньютоновский предел

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\frac{GM(r)\rho(r)}{r^2}, \quad (17)$$

$$\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r), \quad (18)$$

$$\frac{d\Phi(r)}{dr} = \frac{GM(r)}{r^2}, \quad (19)$$

Эти уравнения хорошо описывают нерелятивистские объекты, где поправки общей теории относительности пренебрежимо малы.

Численно решая уравнение Толмана-Оппенгеймера-Волкова для уравнения состояния Чандрасекара ( $\mu = 2$ ) при конечных температурах, получено соотношение массы и радиуса (см. рисунок 2).

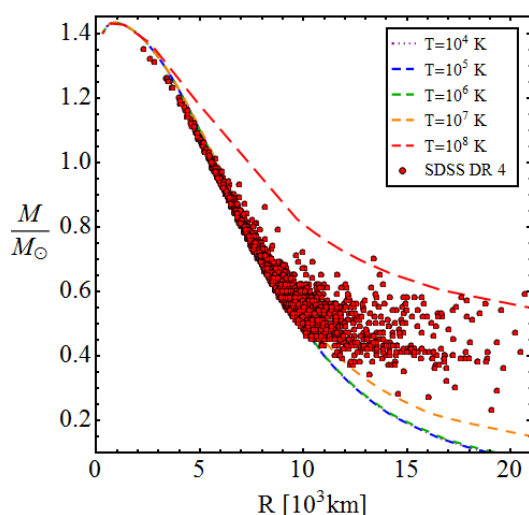


Рисунок 2 – Соотношение массы и радиуса при температурах  $T = (10^4, 10^5, 10^6, 10^7, 10^8)$  К (кривые линии) и их сравнение с наблюдательными данными SDSS DR 4 (кружки)

Из рисунков 2 и 3 видно, что эффекты конечных температур существенны для маломассивных белых карликов (в рисунке 2 в пределах массы  $M \approx (0.2 - 0.8) M_{\odot}$ ). Более того, с уменьшением массы роль данного эффекта растет. Это говорит о том, что вещество маломассивных белых карликов нельзя считать полностью вырожденным.

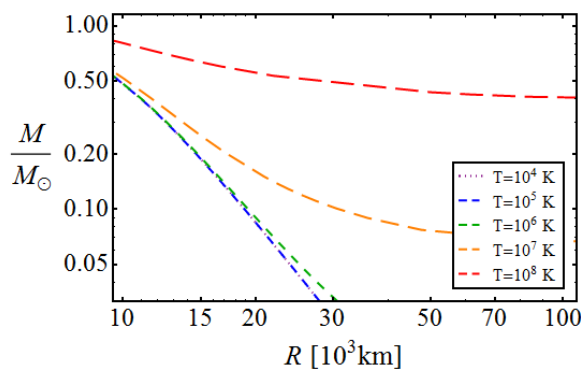


Рисунок 3 – Соотношение массы и радиуса при температурах  $T = (10^4, 10^5, 10^6, 10^7, 10^8)$  К (кривые линии) при интервале радиуса  $R = (10^4 - 10^5)$  км.

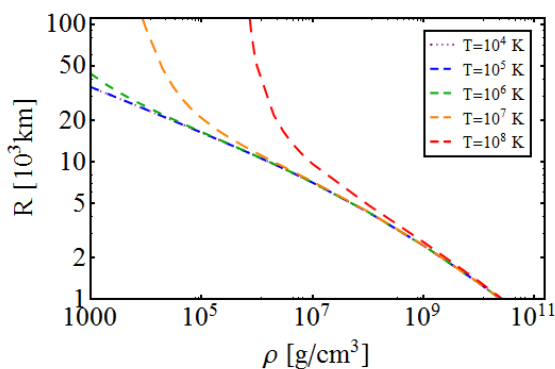


Рисунок 4 – Соотношения центральная плотность-радиус при температурах  $T = (10^4, 10^5, 10^6, 10^7, 10^8)$  К



Как видно из рисунков 4 и 5 в соотношениях центральная плотность-радиус и центральная плотность-масса с уменьшением центральной плотности эффекты температур более заметны более явно, а с увеличением центральной плотности эти эффекты ослабевают. То есть эффекты температур особенно важны в для маломассивных белых карликов.

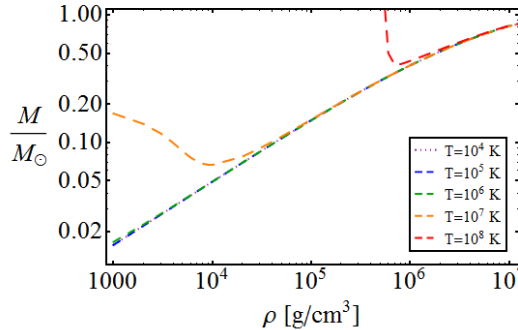


Рисунок 5 – Соотношения центральная плотность-масса при температурах  $T = (10^4, 10^5, 10^6, 10^7, 10^8)$  К

**5 Спутники - белые карлики миллисекундных пульсаров.** Миллисекундный пульсар – это пульсар с периодом вращения в диапазоне от 1 до 10 миллисекунд. Подобные пульсары были обнаружены в радио-, рентгеновском и гамма-диапазоне волн электромагнитного спектра. Теория происхождения миллисекундных пульсаров полностью не разработана. Наиболее распространенная теория их образования гласит, что они начинают свою жизнь как пульсары с небольшими периодами вращения, но затем постепенно раскручивается путём аккреции. Миллисекундные пульсары являются компонентами маломассивных рентгеновских двойных систем [19].

Для теоретической оценки температуры ядра в статье рассматриваются белые карлики, которые являются спутниками миллисекундных пульсаров PSR J1738+0333, PSR J1012+5307 и PSR J1911-5958A. В расчетах, для простоты, ядра белых карликов считаются изотермическими.

**5 а) PSR J1738+0333.**

В работе Antoniadis и др. [20] были получены фотометрический радиус  $R = (0.042 \pm 0.004) R_{\odot}$  спутника-белого карлика PSR J1738+0333, и с помощью анализа спектра атмосферы белого карлика эффективная поверхностная температура  $T_{eff} = (9130 \pm 150)$  К и логарифмическая поверхностная гравитация  $\log_{10}(g) = \log_{10}(GM/R^2) = 6.55 \pm 0.1$ . Детали наблюдения и технические аспекты измерения параметров двойной системы можно найти в соответствующих работах [20].

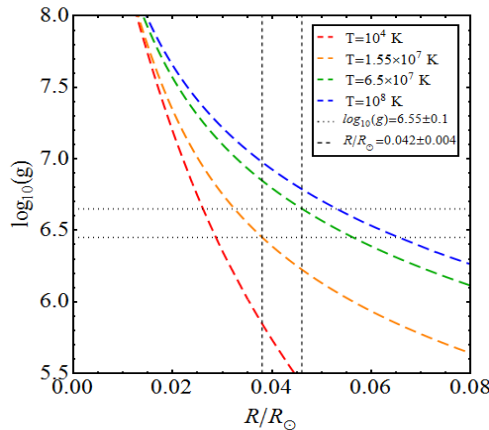


Рисунок 6 – Зависимость логарифма поверхностной гравитации от радиуса

На рисунке 6 была построена зависимость логарифма поверхностной гравитации как функция радиуса белых карликов при разных температурах изотермического ядра  $T = (10^4, 1.55 \times 10^5, 6.5 \times 10^6, 10^8) \text{ K}$ . Для оценки температуры изотермического ядра были также приведены наблюдательные данные для БК и двойной системы PSR J1738+0333. Горизонтальные пунктирные и вертикальные точечно-пунктирные линии на рисунке 6 показывают максимальные и минимальные значения поверхностной гравитации  $\log_{10}(g) = 6.55 \pm 0.1$  и фотометрического радиуса  $R = (0.042 \pm 0.004) R_{\odot}$ , соответственно. С помощью этих данных из рисунков можно графически определить, что температура ядра БК – спутника (компаньона) пульсара находится приблизительно в районе  $T_c \approx (1.55 - 6.5) \times 10^7 \text{ K}$ .

Полученный теоретический результат можно сравнить с наблюдением. Для этого воспользуемся формулой Коестера [21], которая связывает поверхностную температуру белого карлика с температурой изотермического ядра

$$\frac{T_{eff}^4}{g} = 2.05 \times 10^{-10} T_c^{2.56}, \quad (20)$$

где  $T_{eff}$  – поверхностная эффективная температура,  $T_c$  – температура изотермического ядра (температура в центре БК),  $g$  – поверхностная гравитация (ускорение свободного падения). Формула Коестера была получена, решая уравнения теплопроводности для вырожденного вещества белого карлика, с учетом толщины оболочки (атмосферы) БК и поправок гравитационного красного смещения. Для белого карлика в системе PSR J1738+0333 формула Коестера выдает температуру изотермического ядра  $T_c = (2.59 \pm 0.17) \times 10^7 \text{ K}$ , которая в пределах погрешности полностью совпадает с нашей теоретической оценкой.

### 5 6) PSR J1012+5307.

В работе J. A. Panei et al. [22] приведены параметры белого карлика, такие как  $\log_{10}(g) = 6.34 \pm 0.2$ ,  $M = (0.16 \pm 0.02) M_{\odot}$  и  $T_{eff} = (8670 \pm 300) \text{ K}$  в тесной двойной системе PSR J1012+5307. В частности, для графических расчетов были использованы значения ускорения свободного падения и массы БК.

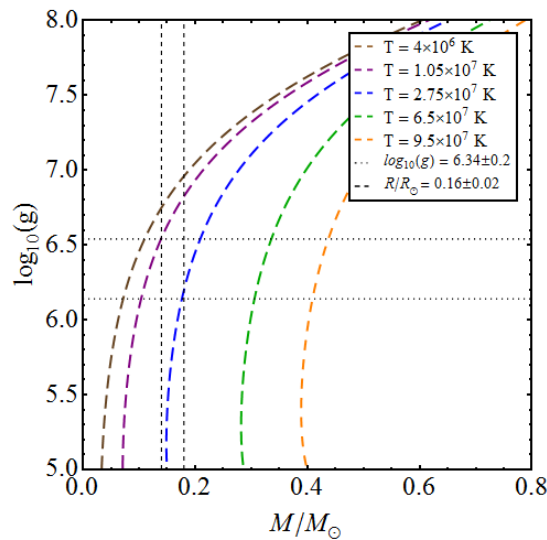


Рисунок 7 – Зависимость логарифма поверхностной гравитации от массы

На рисунке 7 был построен график ускорения свободного падения на поверхности  $\log_{10}(g)$  как функция массы белых карликов с внутренними температурами  $T = (10^4, 1.05 \times 10^7, 2.75 \times 10^7, 6.5 \times 10^7, 9.5 \times 10^7) \text{ К}$ . Горизонтальные пунктирные линии показывают максимальные и минимальные значения  $\log_{10}(g) = 6.34 \pm 0.2$ , а вертикальные пунктирные линии максимальные и минимальные значения массы  $M = (0.16 \pm 0.02) M_{\odot}$  белого карлика в системе PSR J1012-5307.

На основе теоретических кривых и наблюдательных данных была сделана оценка температуры ядра белого карлика – спутника пульсара. По нашей оценке она приблизительно равна  $T_c = (1.05 - 2.75) \times 10^7 \text{ К}$ , в то время соотношение Коестера выдает  $T_c = (2.9 \pm 0.4) \times 10^7 \text{ К}$ . Следовательно, наблюдательное и теоретическое значения температуры ядра  $T_c$  совпадают в диапазоне  $(2.5 - 2.75) \times 10^7 \text{ К}$ .

### 5 в) PSR J1911-5958A.

На рисунке 8 было получено соотношение масса-радиус горячих статических белых карликов при конечных температурах  $T = (4 \times 10^6, 2.75 \times 10^7, 6.5 \times 10^7, 9.5 \times 10^7) \text{ К}$ . Диагональные пунктирные линии показывают максимальные и минимальные значения ускорения свободного падения на поверхности  $\log_{10}(g) = 6.44 \pm 0.2$ , вертикальные точечно-пунктирные линии радиуса  $R = (0.044 \pm 0.009) R_{\odot}$  белого карлика - спутника миллисекундного пульсара PSR J1911-5958A.

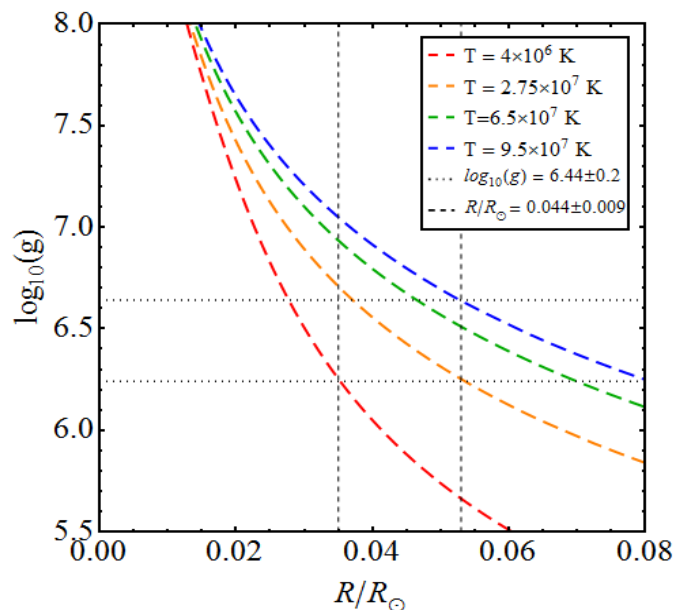


Рисунок 8 – Зависимость логарифма поверхностной гравитации от радиуса

Из рисунка 8 можно аналогично к предыдущим случаям графически определить температуру ядра БК в двойной системе PSR J1911-5958A. Наша оценка показывает, что температура ядра БК находится в пределах  $T_c = (0.4 - 9.5) \times 10^7 \text{ К}$ . Для этого БК с поверхностной гравитацией  $\log_{10}(g) = 6.44 \pm 0.2$  и поверхностной эффективной температурой  $T_{eff} = (10090 \pm 150) \text{ К}$  (см. J. A. Panei et al. [22]) формула Коестера выдает температуру ядра  $T_c = (3.35 \pm 0.5) \times 10^7 \text{ К}$ , которая в пределах погрешности наблюдения совпадает с нашей оценкой.

Таблица 1 – параметры белых карликов.

Параметры БК  Источники	Наблюдения				Теоретические расчеты температуры ядра БК $T_c$ ( $10^7\text{K}$ )	
	$T_{eff}$ (К)	$\log_{10}(g)$	$M/M_\odot$	$R/R_\odot$	Формула Коэстера	Наша оценка
PSR J1738+0333	9130±150	6.55±0.1	---	0.042±0.004	2.59±0.17	4.025±2.475
PSR J1012+5307	8670±300	6.34±0.2	0.16±0.02	---	2.9±0.4	1.9±0.5
PSR J1911-5958A	10090±150	6.44±0.2	---	0.044±0.009	3.35±0.5	4.95±4.55

В таблице 1 – приведены основные наблюдательные данные и теоретические расчеты, выполненные в этой статье. Как видно, из таблицы теоретические расчеты в пределах погрешности наблюдения вполне соответствуют.

**6 Заключение.** В статье были исследованы свойства невращающихся горячих белых карликов в рамках общей теории относительности. С этой целью, уравнение Толмана-Оппенгеймера-Волкова совместно с уравнением баланса массы были проинтегрировано численно с использованием уравнения состояния Чандрасекара ( $\mu = 2$ ) при конечных температурах. В результате были получены соотношения центральная плотность-масса, центральная плотность-радиус, масса-радиус для горячих белых карликов. Исследования показывают, что эффекты конечных температур существенно влияют на структуру белых карликов при низких плотностях, то есть они играют ключевую роль для маломассивных белых карликов.

Помимо этого, было показано, что учет эффектов конечных температур может объяснить вычисленные массы и радиусы белых карликов из выпуска данных 4 Sloanовского цифрового небесного обзора. Следовательно, для построения реалистичной модели белых карликов эффекты конечных температур должны быть приняты во внимание надлежащим образом. Наши расчеты полностью подтверждают правильность выводов сделанных в работе [12].

В статье также были оценены температуры изотермических ядер некоторых белых карликов-спутников миллисекундных пульсаров PSR J1738+0333, PSR J1012+5307 и PSR J1911-5958A. Параллельно эти оцененные температуры были проверены с помощью формулы Коэстера. Подход, примененный в этой статье, можно рассматривать как альтернативный способ вычисления температуры ядра и поверхности белого карлика. В дальнейших работах, для полноты, будут рассмотрены невращающиеся и вращающиеся горячие белые карлики в общей теории относительности с учетом ядерного состава, кулоновского взаимодействия, поправки Томаса-Ферми и т.д.

**Благодарность.** Работа была выполнена при поддержке гранта 3101/ГФ4 ИПС-11/2015, МОН РК.

**Приложение А.** В данном приложении приводится вывод следующего выражения

$$n_e = \frac{8\pi\sqrt{2}}{(2\pi\hbar)^3} m_e^3 c^3 (\beta)^{3/2} [F_{1/2}(\eta, \beta) + \beta F_{3/2}(\eta, \beta)] = \frac{8\pi}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{\exp[(E(p) - \mu_e(p))/k_B T] + 1}, \quad (\text{A } 1)$$

для этого воспользуемся интегралом Ферми-Дирака, далее приведены алгебраические преобразования и окончательный вывод вышеприведенной формулы.

$$n_e = \frac{8\pi\sqrt{2}}{(2\pi\hbar)^3} m_e^3 c^3 (\beta)^{3/2} [F_{1/2}(\eta, \beta) + \beta F_{3/2}(\eta, \beta)] = \frac{8\pi\sqrt{2}}{(2\pi\hbar)^3} m_e^3 c^3 (\beta)^{3/2} \left[ \int_0^\infty \frac{t^{1/2} \sqrt{1 + (\beta/2)t}}{1 + \exp[t - \eta]} dt + \beta \int_0^\infty \frac{t^{3/2} \sqrt{1 + (\beta/2)t}}{1 + \exp[t - \eta]} dt \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{8\pi\sqrt{2}}{(2\pi\hbar)^3} m_e^3 c^3 \left( \frac{k_B T}{m_e c^2} \right)^{3/2} \int_0^\infty \left[ \frac{2(E(p)/(k_B T))^{1/2} \sqrt{1+E(p)/(2m_e c^2)}}{1+\exp\left[\frac{E(p)-\mu_e(p)}{k_B T}\right]} + \left( \frac{k_B T}{m_e c^2} \right) \frac{(E(p)/(k_B T))^{3/2} \sqrt{1+E(p)/(2m_e c^2)}}{1+\exp\left[\frac{E(p)-\mu_e(p)}{k_B T}\right]} \right] \times \\
&\times \frac{c^2 p dp}{k_B T \sqrt{c^2 p^2 + m_e^2 c^4}} = \frac{8\pi\sqrt{2}}{(2\pi\hbar)^3} m_e^3 c^3 \int_0^\infty \left[ \left( \frac{E(p)}{k_B T} \right)^{1/2} \left( \frac{k_B T}{m_e c^2} \right)^{3/2} + \left( \frac{E(p)}{k_B T} \right)^{3/2} \left( \frac{k_B T}{m_e c^2} \right)^{5/2} \right] \frac{\sqrt{1+\frac{E(p)}{2m_e c^2}}}{1+e^{\frac{E(p)-\mu_e(p)}{k_B T}}} \times \\
&\times \frac{c^2 p dp}{k_B T \sqrt{c^2 p^2 + m_e^2 c^4}} = \frac{8\pi\sqrt{2}}{(2\pi\hbar)^3} m_e^3 c^3 \int_0^\infty \left[ \frac{(E(p))^{1/2}}{(m_e c^2)^{3/2}} + \frac{(E(p))^{3/2}}{(m_e c^2)^{5/2}} \right] \frac{\sqrt{1+E(p)/(2m_e c^2)}}{1+\exp\left[\frac{E(p)-\mu_e(p)}{k_B T}\right]} \frac{c^2 p dp}{\sqrt{c^2 p^2 + m_e^2 c^4}} = \\
&= \left| \frac{(E(p))^{1/2}}{(m_e c^2)^{3/2}} \left( 1 + \frac{E(p)}{m_e c^2} \right) = \frac{(E(p))^{1/2}}{(m_e c^2)^{5/2}} (m_e c^2 + E(p)) \right| = \frac{8\pi\sqrt{2}}{(2\pi\hbar)^3} m_e^3 c^3 \int_0^\infty \frac{(E(p))^{1/2}}{(m_e c^2)^{5/2}} \frac{(m_e c^2 + E(p)) \sqrt{1+\frac{E(p)}{2m_e c^2}}}{1+e^{\frac{E(p)-\mu_e(p)}{k_B T}}} \times \\
&\times \frac{c^2 p dp}{\sqrt{c^2 p^2 + m_e^2 c^4}} = \frac{8\pi\sqrt{2}}{(2\pi\hbar)^3} m_e^3 c^3 \int_0^\infty \frac{\sqrt{2m_e c^2 E(p) + E^2(p)}}{\sqrt{2m_e^3 c^6}} \frac{c^2 p dp}{1+e^{\frac{E(p)-\mu_e(p)}{k_B T}}} = \left[ \sqrt{2m_e c^2 E(p) + E^2(p)} = \quad (A 2) \right. \\
&= \left. \sqrt{2m_e c^2 \left( \sqrt{c^2 p^2 + m_e^2 c^4} - m_e c^2 \right) + \left( \sqrt{c^2 p^2 + m_e^2 c^4} - m_e c^2 \right)^2} = cp \right] = \frac{8\pi}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{1+\exp\left[\frac{E(p)-\mu_e(p)}{k_B T}\right]}.
\end{aligned}$$

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] S.L. Shapiro, S.A. Teukolsky. Black Holes, White Dwarfs, and Neutron Stars: The Physics of Compact Objects (John Wiley & Sons, New York, 1983).
- [2] S. Chandrasekhar, *The Astrophysics Journal*, 1931, 74, 81.
- [3] U. Das, B. Mukhopadhyay, *Physical Review D*, 2012, 86, 042001.
- [4] U. Das, B. Mukhopadhyay, *International Journal of Modern Physics D*, 2012, 21(11), 124001.
- [5] U. Das and B. Mukhopadhyay, *Physical Review Letters*, 2013, 110, 071102.
- [6] D.G. Yakovlev, *International Journal of Modern Physics A*, 2016, 31, 1641017.
- [7] K.A. Boshkayev, B.A. Zhami et al, *News of NAS RK*, 2016, 3 (307), 49-60.
- [8] M. Rotondo, J. A. Rueda, R. Ruffini and S.-S. Xue, *Physical Review D*, 2011, 84, 084007.
- [9] K. Boshkayev, J. A. Rueda, R. Ruffini, I. Siutsou, *The Astrophysical Journal*, 2013, 762, (2), 117.
- [10] K. Boshkayev, J.A. Rueda, R. Ruffini, I. Siutsou, General Relativistic and Newtonian White Dwarfs // Proceedings of the MG13 Meeting on General Relativity (in 3 Volumes). Edited by Rosquist Kjell et al. Published by World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2015. ISBN #9789814623995, pp. 2468-2474.
- [11] S. L. Shapiro and S. A. Teukolsky, *J.Br. Astronom. Assoc.*, 1983, 93, 276.
- [12] S. M. de Carvalho, M. Rotondo, J. A. Rueda and R. Ruffini, *Physical Review C*, 2014, 89, 015801.
- [13] K. Boshkayev, J.A. Rueda, B. Zhami, Zh. Kalymova, G. Balgymbekov, *International Journal of Modern Physics: Conference Series*, 2016, 1660129.
- [14] K. Boshkayev, J.A. Rueda, B. Zhami, *Proceedings of the Twelfth Asia-Pacific International Conference*. Edited by HSU JONG-PING ET AL. Published by World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2016. ISBN #9789814759816, pp. 189-190.
- [15] P.-E. Tremblay, P. Bergeron, and A. Gianninas, *The Astrophysics Journal*, 2011, 730, 128.
- [16] S.O. Kepler, I. Pelisoli, D. Koester et al, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2015, 446, 4078.
- [17] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Статическая физика: Том 5. (Наука, Москва, 1976).
- [18] J. R. Oppenheimer and G.M. Volkoff, *Phys. Rev.*, 1939, 55, 374 (in Eng.).

- [19]P. Haensel, A.Y. Potekhin, D.G. Yakovlev. Neutron Stars I: Equation of State and Structure (Springer, New York, 2007).
- [20]J. Antoniadis, M. H. van Kerkwijk, D. Koester, P. C. C. Freire, N. Wex, T. M. Tauris, M. Kramer, and C. G. Bassa, *Mon. Not. Roy. Astr. Soc.*, 2012, 423, 3316.
- [21]D. Koester, *Astronomy and Astrophysics*, 1976, 52, 415.
- [22]J. A. Panei, L. G. Althaus, X. Chen, Z. Han, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2007, 382, 779.

## REFERENCES

- [1] S.L. Shapiro, S.A. Teukolsky. Black Holes, White Dwarfs, and Neutron Stars: The Physics of Compact Objects (John Wiley & Sons, New York, 1983) (in Eng.).
- [2] S. Chandrasekhar, *The Astrophysics Journal*, 1931, 74, 81 (in Eng.).
- [3] U. Das, B. Mukhopadhyay, *Physical Review D*, 2012, 86, 042001 (in Eng.).
- [4] U. Das, B. Mukhopadhyay, *International Journal of Modern Physics D*, 2012, 21(11), 124001 (in Eng.).
- [5] U. Das and B. Mukhopadhyay, *Physical Review Letters*, 2013, 110, 071102 (in Eng.).
- [6] D.G. Yakovlev, *International Journal of Modern Physics A*, 2016, 31, 1641017 (in Eng.).
- [7] K.A. Boshkayev, B.A. Zhami et al, *News of NAS RK*, 2016, 3 (307), 49-60 (in Kaz.).
- [8] M. Rotonondo, J. A. Rueda, R. Ruffini and S.-S. Xue, *Physical Review D*, 2011, 84, 084007 (in Eng.).
- [9] K. Boshkayev, J. A. Rueda, R. Ruffini, I. Siutsou, *The Astrophysical Journal*, 2013, 762, (2), 117 (in Eng.).
- [10]K. Boshkayev, J.A. Rueda, R. Ruffini, I. Siutsou, General Relativistic and Newtonian White Dwarfs // Proceedings of the MG13 Meeting on General Relativity (in 3 Volumes). Edited by Rosquist Kjell et al. Published by World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2015. ISBN #9789814623995, pp. 2468-2474 (in Eng.).
- [11]S. L. Shapiro and S. A. Teukolsky, *J.Br. Astronom. Assoc.*, 1983, 93, 276 (in Eng.).
- [12]S. M. de Carvalho, M. Rotonondo, J. A. Rueda and R. Ruffini, *Physical Review C*, 2014, 89, 015801 (in Eng.).
- [13]K. Boshkayev, J.A. Rueda, B. Zhami, Zh. Kalymova, G. Balgymbekov, *International Journal of Modern Physics: Conference Series*, 2016, 1660129 (in Eng.).
- [14]K. Boshkayev, J.A. Rueda, B. Zhami, *Proceedings of the Twelfth Asia-Pacific International Conference*. Edited by HSU JONG-PING ET AL. Published by World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2016. ISBN #9789814759816, pp. 189-190 (in Eng.).
- [15]P.-E. Tremblay, P. Bergeron, and A. Gianninas, *The Astrophysics Journal*, 2011, 730, 128 (in Eng.).
- [16]S.O. Kepler, I. Pelisoli, D. Koester et al, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2015, 446, 4078 (in Eng.).
- [17]L.D. Landau, E.M. Lifshitz. *Sticheseskaya fizika: Tom 5 (Nauka, Moskva, 1976)* (in Russ.).
- [18]J. R. Oppenheimer and G.M. Volkoff, *Phys. Rev.*, 1939, 55, 374 (in Eng.).
- [19]P. Haensel, A.Y. Potekhin, D.G. Yakovlev. Neutron Stars I: Equation of State and Structure (Springer, New York, 2007) (in Eng.).
- [20]J. Antoniadis, M. H. van Kerkwijk, D. Koester, P. C. C. Freire, N. Wex, T. M. Tauris, M. Kramer, and C. G. Bassa, *Mon. Not. Roy. Astr. Soc.*, 2012, 423, 3316 (in Eng.).
- [21]D. Koester, *Astronomy and Astrophysics*, 1976, 52, 415 (in Eng.).
- [22]J. A. Panei, L. G. Althaus, X. Chen, Z. Han, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2007, 382, 779 (in Eng.).

Қ.А. Бошқаев<sup>1,2</sup>, Б.А. Жәми<sup>1</sup>, Ж.А. Қалымова<sup>1</sup>, Ж.Н. Бришева<sup>1</sup>

<sup>1</sup>ЭТФҒЗИ, Әл-Фараби атындағы ҚазҰУ, Алматы, 050040, Қазақстан

<sup>2</sup>ICRANet, Piazza della Repubblica 10, Pescara, I-65122, Italy

## ШЕКТІ ТЕМПЕРАТУРАЛАР МЕН ЖАЛПЫ САЛЫСТЫРМАЛЫҚ ТЕОРИЯСЫНЫҢ ӘСЕРЛЕРІН ЕСКЕРГЕНДЕГІ СТАТИКАЛЫҚ АҚ ЕРГЕЖЕЙЛІ ЖҰЛДЫЗДАР

**Аннотация.** Мақалада суық және ыстық ақ ергежейлі жұлдыздар Чандрасекар күй теңдеуінің көмегімен жалпы салыстырмалық теориясы аясында зерттелді. Ақ ергежейлі жұлдыздардың келесідей негізгі параметрлері есептелінді: орталық тығыздық, қысым, масса, радиус, изотермиялық ядро температурасы және беттік еркін түсу үдеуі. Массасы аз ақ ергежейлі жұлдыздарда шекті температуралардың әсерлерін ескеру қажеттігі көрсетілді. Температураның әсерін ескеру арқылы Sloan Digital Sky Survey Data Release 4 бақылауынан белгілі болған деректерді түсіндіруге болады. Сонымен қатар PSR J1738+0333, PSR J1012+5307 және PSR J1911-5958A миллисекундтық пульсарлардың серігі болып табылатын ақ ергежейлі жұлдыздардың ядроларының температуралары бағаланды.

**Тірек сөздер:** ақ ергежейлі жұлдыздар, жалпы салыстырмалық теориясы, шекті температураның әсерлері, бақылған деректер.

## NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN  
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 6, Number 316 (2017), 39 – 44

UDC 008.2; 336.76A.N. Murzakhmetov<sup>1</sup> A.M. Fedotov<sup>2</sup>, M.B. Grishko<sup>3</sup>, A.E. Dyusembaev<sup>4</sup><sup>1,3,4</sup>Department of Information Systems, Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan;<sup>2</sup>Institute of Computational Technologies of SB RAS, Novosibirsk, RussiaE-mail: <sup>1</sup>[aslanmurzakhmet@gmail.com](mailto:aslanmurzakhmet@gmail.com), <sup>2</sup>[fedotov@sbras.ru](mailto:fedotov@sbras.ru), <sup>3</sup>[gmv\\_87@mail.ru](mailto:gmv_87@mail.ru), <sup>4</sup>[anuardu@yahoo.com](mailto:anuardu@yahoo.com)**MODELING OF DISTRIBUTION OF INNOVATION  
IN SOCIO-ECONOMIC SYSTEMS**

**Abstract.** In this article issues consider the diffusion of innovation in social systems, the dynamics of the spread of innovations in social communities under the influence of the mass media and interpersonal communication, the process of shaping public opinion. Models of innovation dissemination were analyzed. We are realized practical implementation of the simulation of innovation spread and factors affecting the distribution process based on modified Bass model by our. For this, we chose the software product of simulation modeling Anylogic. As the research results show, the processes of distribution of various information messages in social systems can determine mass consciousness and, accordingly, mass behavior of people in these social and economic systems.

**Key words:** diffusion of innovation, social system, interpersonal communication, media influence, the dissemination of ideas in society, dynamics of innovation spread

ӘОЖ 008.2; 336.76А.Н. Мурзахметов<sup>1</sup>, А.М. Федотов<sup>2</sup>, М.В. Гришко<sup>3</sup>, А.Е. Дюсембаев<sup>4</sup><sup>1,3,4</sup> әль-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық Университеті, Алматы, Қазақстан;<sup>2</sup>РГА СБ Есептеу технологиялар институты, Новосібір, Ресей**ӘЛЕУМЕТТІК-ЭКОНОМИКАЛЫҚ ҚОҒАМДАРДА  
ИННОВАЦИЯНЫҢ ТАРАЛУЫН МОДЕЛЬДЕУ**

**Аннотация.** Мақалада әлеуметтік және экономикалық жүйелердегі инновацияның диффузиясы, бұқаралық ақпараттық құралдар (БАҚ) және тұлғааралық коммуникацияның әсерінен инновацияның қоғамда таралу динамикасы және қоғамдық пікірдің қалыптасу үрдісі қарастырылған. Инновацияның таралу моделі сарапталынған. Зерттеу нәтижелері көрсеткендей түрлі ақпараттардың әлеуметтік-экономикалық жүйелерде таралу үрдісі жалпы түсінікті, сәйкесінше осы жүйелердегі адамдардың жаппай қылығын анықтайды.

**Тірек сөздер:** инновация диффузиясы, әлеуметтік жүйе, тұлғааралық коммуникация, БАҚ әсері, қоғамда ой-піріктің таралуы, инновацияның таралу динамикасы.

**Кіріспе.** Қазіргі заманда ақпараттың таралуында әлеуметтік жүйелер үлкен рөл атқарады, және осы жағдайда ақпараттық технологиялар қоғамға және жалпы түсінікке тиімді және жылдам әсер етуші қару болып табылады. БАҚ және интернет ресурстары арқылы қоғамда дүрлікпе ұйымдастыру механизмдерін ұғу және қолдану қоғамдағы тұрақсыздықты қамтамасыз етуге қажетті ақпаратты бере алады, мұндай келесенсіздектер өз кезегінде кез келген мемлекеттік экономикасына кері әсерін тигізеді. Инновация ретінде қандай да бір идеяны, пікірді, ақпаратты қарастыруға да болады.

Осылайша, әлеуметтік жүйедегі ақпараттың таралу динамикасын зерттеу көп салада маңызда, соның бірі экономика саласында.

Қоғамдық пікір – бұл қоғамда болып жатқан жайыттарға, болмыстарға және мәселелерге қоғамның немесе оның бір бөлгінің жасырын немесе анық қатынасын қамтитын жалпы ахуалдың жағдайы. Қоғамдық пікір бірқатар функцияларды атқарады. Олар: ақпараттандыру, кеңес беру, бақылау және қоғамның қызығушылығын тудыратын өзекті мәселелер бойынша шешім қабылдауға талап ету. Қоғамдық пікір тек ғана түрлі әлеуметтік факторларға тәуелді емес, сонымен қатар белгілі бір жағдайларда басқа әлеуметтік құбылыстарға әсер етуі мүмкін. Қоғамдық пікірді әлеуметтік жүйелердің түрлі элементтеріне әсер етуін ескере отырып қарастыру керек, нақты айтқанда экономикаға, саясатқа, мәдениет саласына, экологияға және т.б.

Қазірге кезде кез келген мемлекеттің қор нарығы және қаржы жүйесі бағасының өсу немесе құлдырау оқиғаларына жиі әсер етеді. Бір мемлекеттің өзге мемлекетке, компанияларларға және ресми тұлғаларға қолданылған санкциялары жарияланғаннан кейін БАҚ-да «нарықтың құлдырауы» туралы хабар жиі таратылады, бұл өз кезегінде қор нарығының және ұлттық валютаның әлсіреуіне ықпал етеді. Осы жайыттарды ескере отырып, көптеген ғалымдар ақпарат немесе инновация диффузиясын терең зерттеді және сол зерттеулер медиаәсерді түсінуге үлкен септігін тигізді. Мысалы, П. Дойчманн және У. Даниельсон жаңалықтар диффузиясын зерттеу барысында олардың басқа инновация диффузияларына қарағанда біршама жылдам таралатынын байқаған. Бұл зерттеулер үлкен маңыздылыққа ие болды себебі, сол арқылы көптеген ғалымдар жаңалықтар диффузиясына жергілікті, ұлттық және халықаралық деңгейде қызығушылық танытты [1].

Қоғамдағы инновацияның беталысын болжау, олардың тұтынушы топтардың арасында таралу тапсырмалары ақпараттық коммуникациялық технологиялар сервисі дамымай тұрып пайда болған. XX ғасырдың 60-шы жылдары әлеуметтік жүйелерге инновациялардың ену үрдістерін және қоғамдағы өзгерістерді түсіндіретін математикалық модельдер және концепциялар ұсынылды. Олардың ішінде Э. Роджерс және Ф. Бассты айтуға болады, бұл ғалымдардың зерттеу нәтижелері қазіргі кезге дейін қолданылып және дамып келеді [2].

**Эверест Роджерстың диффузиялық моделі.** Роджерс өзінің "Диффузия инноваций" атты жұмысында түрлі инновациялардың қоғамда қабылдану деңгейлерін зерттеді. Оның зерттеу нәтижелері бойынша қоғам мүшелерінің шешім қабылдау графигі 5 бөлікке бөлінген қоңырау тәрізді қисыққа (қалыпты үлестірім) ұқсас. Э.Роджерс стандартты ауытқуларды ескере отырып әрбір сегментке атау және шамалас бағасын берді: инноваторлар (тәуекелге бейім, барлық жаңашылдыққа ашық жеке тұлғалар) - 2,5%; ерте ерушілер (инновация жайлы ақпарат көзі, олардың пікірімен санасады) - 13,5%; ерте көпшілік (жаңа идеяларды және технологияларды бірінші болып қабылдағысы келмейтін адамдар санаты) - 34%; кеш көпшілік (инновацияның артықшылығына сенбей, шүбә көзбен қараушылар) - 34%; артта қалушылар (өткенге, тарихқа байланған және қандай да бір жаңашылдықты баяу қабылдайтын қоғам мүшелері) - 16% [3].

**Френк Басстың диффузиялық моделі.** Басс моделі бойынша инновациялық өнімді қабылдаушылар санының артуы екі әсермен түсіндіріледі:

- жарнама әсері;
- тұлғааралық коммуникация әсері.

Роджерс қарағанда Басс адамдар санатын 5 емес тек 2 ғана бөлді: 1) инновацияны бірінші кезекте өздері татып көретін және ол жайлы түрлі хабарламалардан білетін адамдар; 2) инновацияны бірінші санаттағы адамдардан біліп, олардың пікіріне құлақ асатын адамдар. Мұнда жарнаманың әсері едәуір төмендейді. Көп жағдайда бірінші санаттығы адамдардың пікірі қызық, себебі новатор үшін бүгінгі қалыпты жағдай ертен көпшілік үшін қалыпты жағдайға айналады. Төменде Басс моделі көрсетілген:

$$\frac{dF}{dt} = \left( p + q \frac{F(t)}{N} \right) (N - F(t))$$

мұндағы  $F(t)$  -  $t$  уақыт аралығына дейін инновацияны қабылдаған агенттер саны,  $N$  – максималды мүмкін болатын агенттер саны,  $p$  – сыртқы әсер ету коэффициенті (жарнама, БАҚ),  $q$  - ішкі әсер ету коэффициенті (тұлғааралық коммуникация) [4].



Басс моделі біршама кеңейтулерге ие, дегенімен өзінің бастапқы түрінде ол агенттердің кері өсімін және агенттер аудиториясына бәсекелестікті ескеру мүмкіндігіне қабілетсіз.

Жұмысымызда  $N$  көлемді агенттер қоғамын қарастырайық. Жорамалмен, әрбір агент қоғамның әрбір мүшесімен байланыса алады. Айнымалы  $y$  арқылы «х» инновациялық идеясы бар агенттер (инноватор) санын белгілейміз. Айтарлық, инноватор  $n$  агенттермен бірлік уақыт аралығымен байланысады және инновациялық идеяны  $k_1$  ықтималдығымен бөліседі, бұл ретте  $k_1 = k_0 p$ , мұндағы  $k_0$  – бір байланыстан кейін инновациялық идеяны қабылдау ықтималдығы,  $p$  - агенттердің инновация тақырыбы бойынша байланысу ықтималдығы. Басқаша айтқанда, инноватор бірлік уақыт аралығында «х» инновациялық идеяны  $k_1 n$  агенттерге таратады, мұндағы  $k_1 n$  идеяны қабылдаушылардың математикалық күтілімі. Инноватор және идеясыз агенттең байланысу ықтималдығы тең  $\frac{y}{N}$ , байланыс нәтижесінде идеяны қабылдау ықтималдығы осы ықтималдықтың  $k_1$  туындысына тең. Осылайша,  $n$  байланыста идеяны тым болмаса бір рет қабылдау ықтималдығы келесідей болмақ:

$$q \approx k_1 n \frac{y}{N}$$

Бірлік уақыт аралығында идеяны ерте қабылдаған агенттерден қабылдау санының математикалық күтілімі  $q$  туындысының инновациялық идеясы жоқ агенттер санына тең:  $q(N - y)$ . Сонымен бірге, бірлік уақыт аралығында идеяны қабылдаған агенттердің өзгерген санының математикалық күтілімі келесі теңдеумен сипатталады:

$$\frac{dy}{dt} = a \frac{N - y}{N} y \quad (1)$$

мұндағы  $a = k_1 n$  - бірлік уақыт аралығында инновациялық идеяны бір агентпен қабылдау ықтималдығы;  $y$  - инновацияны қабылдағандар саны;  $N$  – инновацияны қабылдауға қабілетті максималды мүмкін болатын агенттер саны.

Егер жаңа идеяны қабылдаушы агенттер тығыздығын  $f(t) = \frac{y}{N}$  арқылы белгілесек, онда тығыздық үшін келесі теңдеуді аламыз:

$$\frac{df(t)}{dt} = a(1 - f(t))f(t). \quad (2)$$

Логистикалық өсу теңдеуі деп аталатын (2) теңдуді ең бірінше рет Пьер Ферхюльст 1838 жылы популяцияның өсу динамикасын сипаттау үшін жазып шығарды және бұл теңдеудің аналитикалық шешімі бар [5].

Идеяны ұмыту әсері және қоғамға ақпараттық қысым көрсету (мысалы БАҚ арқылы) байланысты «Инновация диффузиясы» моделінің жалпылауын қарастырайық. Айтарлық, бірлік уақыт аралығындағы «х» идеясын ұмыту ықтималдығы  $g$  шамасына тең, онда  $gy$  уақыт аралығындағы идеяны ұмытқан агенттердің санының математикалық күтілімінің (1) теңдеуі келесі түрге ие болады:

$$\frac{dy}{dt} = a \frac{N - y}{N} y - gy \quad (3)$$

ал (2) теңдеу :

$$\frac{df(t)}{dt} = a(1 - f(t))f(t) - gf(t). \quad (4)$$

Сыртқы әсердің қоғамға қарқындылығы  $M(t)$  функциясымен белгіленсін, бірлік уақыт аралығында бір идеядан хабардар болудың ортақ саны  $k_2$  болсын, сәйкесінше идеяны

қабылдамаған агенттердің осы идеядан хабардар болу ықтималдығы тең  $\left(\frac{N-y}{N}\right)$  және идеяны қабылдау ықтималдығы тең -  $k_3$ . Онда бірлік уақыт аралығында жаңа идеяны сыртқы жайттардың әсерінен қабылдаудың математикалық күтілімі тең -  $M(t)k_2k_3\left(\frac{N-y}{N}\right)$ .

Осылайша, (3) теңдеу сыртқы әсерді есебімен келесі теңдеуге көшеді:

$$\frac{dy}{dt} = a \frac{N-y}{N} y + M(t)b \frac{(N-y)}{N} - gy \quad (5)$$

мұндағы  $b = k_2k_3$  - агенттің бірлік уақыт аралығында инновацияны қабылдау ықтималдығы.  $M'(t) = \frac{M(t)}{N}$  арқылы қоғамға қысым көрсету тығыздығын белгілеп, жаңа идеяны қабылдаушы агенттердің тығыздық теңдеуін аламыз:

$$\frac{df(t)}{dt} = a(1-f(t))f(t) + M'(t)b(1-f(t)) - gf(t). \quad (6)$$

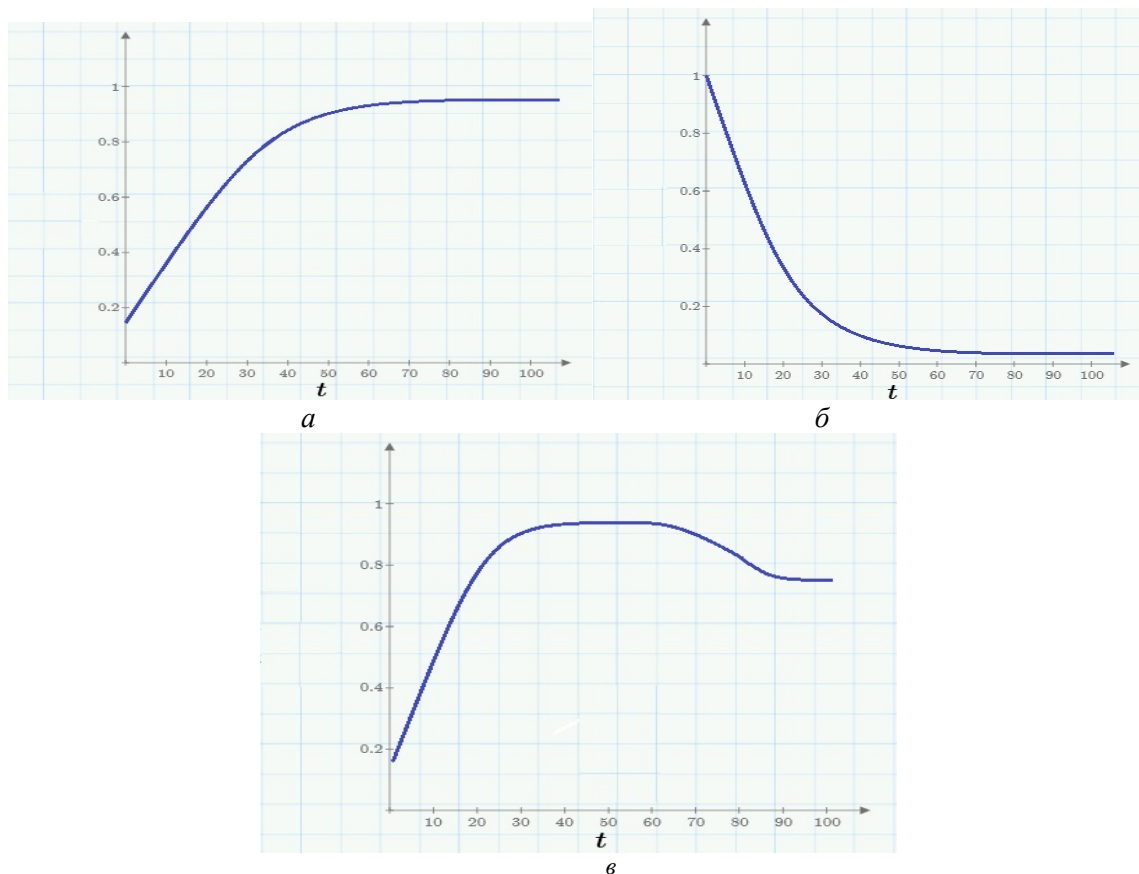
(6) теңдеудің оң жағындағы бірінші қосылғыш қоғамда инновацияның таралуына қатысты ішкі коммуникациялық үрдістермен байланысты; екінші қосылғыш әлеуметтік жүйеде инновацияның таралуына қатысты сыртқы үрдістермен байланысты, мысалы, БАҚ арқылы; және үшінші қосылғыш (азайтқыш) (6) теңдеуде инновацияны ұмыту әсерімен байланысты. Бұл теңдеу инновация теңдеуі деп аталады, БАҚ әсерінсіз теңдеу ұмыту коэффициентіне байланысты екі шешімге ие: өсудің оң және теріс динамикасы. Әлеуметтік жүйеде инновацияны тарату сыртқы процестердің әсерінен болса онда инновация динамикасы әрқашан өседі (сурет 1, а), БАҚ болмаса, онда екі шешімнің бірін қабылдайды, яғни, инновацияны ұмыту коэффициенті үлкен болса инновация таратылмайды (сурет 1, б), егер ұмыту коэффициенті үлкен болмаса инновация қоғамда тарайды (сурет 1, в).

Бұл модельдер коммуникациялық гипотезаға негізделген, гипотеза бойынша қоғамда ақпараттар алдымен кішігірім топты қамтиды, содан кейін өзге тұлғаларға әсер етеді.

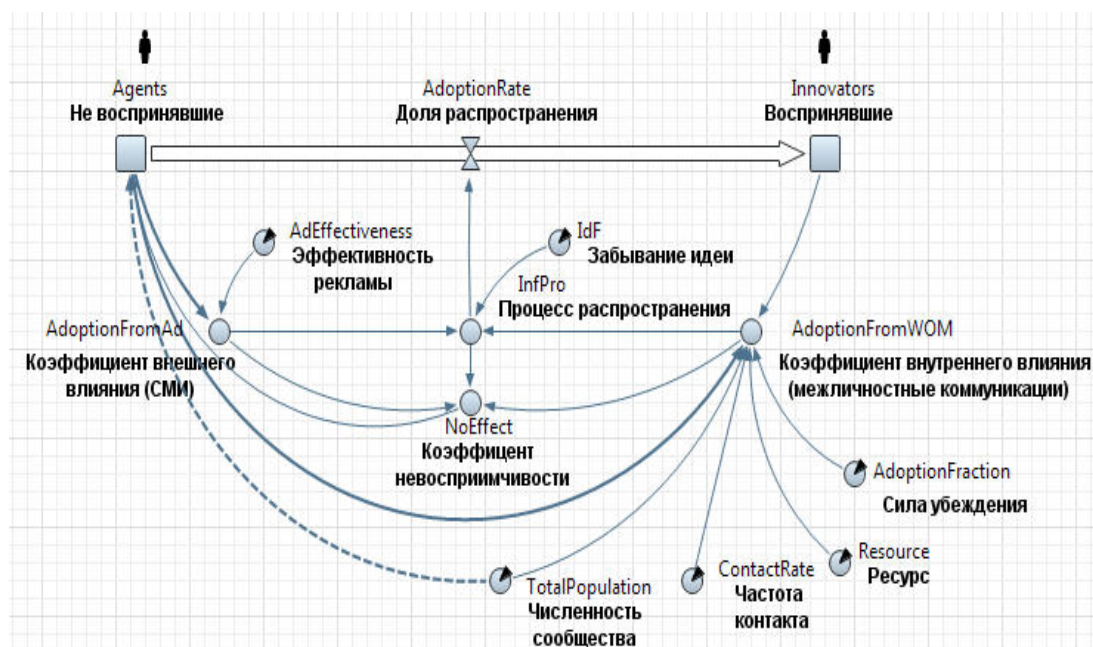
Айталық, әрбір инноватор идеяны тарату үшін біршама ресурс (энергия) жұмсайды және оның сендіру күші жұмсалған ресурсқа пропорционалды болсын:

$$\frac{df(t)}{dt} = a(1-f(t))f(t)h(R) - gf(t). \quad (7)$$

Инновацияның таралуын тәжірибе жүзінде моделдеу Anylogic [6] имитациялық модельдеу пакетінде орындалған. Бұл модельде агенттердің тәртібін түрлі әсер етуші параметрлердің есебімен зерттеуге болады. Өмірлік циклдың бастапқы деңгейінде инновация жарнама әсері ұшырайды, инновация ешкімге белгісіз, және агенттер оны қабылдау үшін инновация жарнамаланады. Нәтижесінде, жарнаманың тиімділігі, агенттер саны сияқты параметрлерге байланысты агенттердің белгілі бір бөлігі инновацияны сыртқы жайыттардың әсерінен қабылдайды (жарнама, БАҚ). Инновацияны қабылдаған агенттер санының артуымен жарнаманың тиімділігі төмендейді, бірақ қандайда бір сәтте тұлғааралық коммуникация әсері артады. Бұл эффектінің себебі, агенттер инновацияны ресурс көлемі, сендіру күші, байланыс жиілігі параметрлерінің тәуелділігінен қабылдайды және идеяны енді қабылдаушы агенттер идеяны бірінші болып қабылдаған агенттермен сұхбаттасау нәтижесінде қабылдайды (сурет. 2).



Сурет 1 - Инновацияның таралу динамикасы: а - оң; б - теріс; в - ақпаратты ұмыту есебімен оң.



Сурет 2 - AnyLogic ортасындағы идеяны тарату моделінің диаграммалар классы

Сонымен қатар, белгілі уақыт аралығында белгісі бір ықтималдықпен қолданушылардың бір күйден екінші күйге ауысуын моделдеуден бөлек, тәжірибелік маңыздылығы және іске асырылуы бойынша қолданушылардың қоғамға тікелей әсері, олардың әртүрлі әлеуметтік байланыстардан ауысу процесстері де үлкен қызығушылыққа ие.

Аталған модель қор нарығындағы инвесторлардың беталысын сипаттауға қолданылуы мүмкін. Бұл ретте, "х" идеясы ретінде инвесторлардың қандайда бір қаржы құралының баға трендісі бойынша көтерілу немесе құлдыруы туралы пікірі болуы мүмкін. Инвесторлар өз бағаларын белгілеу, ұсыну және келісімге тұру арқылы "х" идеясын таратады. Қаржы құралы бойынша жасалған келісімнің бағасын көру арқылы басқа инвесторлар "х" идеясы туралы біледі, және осы трендті қолдай отырып идеяны қабылдайды немесе қабылдамайды.  $\alpha$  және  $n$  параметрлерінің косвенный оценкасы дегеніміз тренд кезіндегі сатылған қаржы активтерінің көлемі болып табылады.  $\beta$  коэффициенті трендтің әсер етуі бойынша корреляцияланған.  $R$  коэффициенті қоғам арасында қаржы құралының айтылу жиілігі бойынша бағаланады.

**Қорытынды.** Бізбен өңделген Басс моделі негізінде инновацияның таралу процесі сипатталынды. Инновацияны модельдеу кезінде циклдық қасиет анықталды. Сұраныс ауытқуы ішкі параметрлер коэффициентіне тәуелді. Жұмыс нәтижелері көрсеткендей, ұлғаю коэффициентінің есебінен біздің жүйе әрдайым тұрақты, сондықтан жүйе нөлдік күйде болмайды.

#### ӘДЕБИЕТ

- [1] Брайант Д., Томпсон С (2004) Основы воздействия СМИ.: Пер. с англ. ISBN 5-8459-0597-4.
- [2] Минаев В.А., Овчинский А.С., Скрыль С.В., Тростянский С.Н. (2012) Как управлять массовым сознанием: современные модели. ISBN 978-5-89789-089-7.
- [3] Rogers E (1995) Diffusion of Innovation. 4 ed. ISBN-13: 978-0029266717.
- [4] Bass F (1969) "A new product growth model for consumer durables". Management Science 15 (5). p. 215–227.
- [5] Ломакин С.Г., Федотов А.М. (2014) Анализ модели передачи информации в сети клеточных автоматов. Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. Том 12, выпуск 3. стр. 86–99. ISSN 1818-7900.
- [6] Borshchev A. (2013) The Big Book of Simulation Modeling: Multimethod Modeling with AnyLogic 6. AnyLogic North America, 614 p.

#### REFERENCES

- [1] Brajant D., Tompson S (2004) Osnovy vozdejstvija SMI.: Per. s Angl ISBN 5-8459-0597-4 (in Russ.).
- [2] Minaev V.A., Ovchinskij A.S., Skryl' S.V., Trostjanskij S.N. (2012) Kak upravljat' massovym soznaniem: sovremennye modeli. ISBN 978-5-89789-089-7 (in Russ.).
- [3] Rogers E (1995) Diffusion of Innovation. 4 ed. ISBN- 13: 978-0029266717.
- [4] Bass F (1969) "A new product growth model for consumer durables". Management Science 15 (5). p. 215–227.
- [5] Lomakin S. G., Fedotov A. M. (2014) Analiz modeli peredachi informacii v seti kletochnyh avtomatov. Vestnik NGU. Serija: Informacionnye tehnologii. Tom 12, vypusk 3. str. 86–99. ISSN 1818-7900 (in Russ.).
- [6] Borshchev A. (2013) The Big Book of Simulation Modeling: Multimethod Modeling with AnyLogic 6. AnyLogic North America, 614 p. ISBN 0989573176.

А.Н. Мурзахметов<sup>1</sup>, А.М. Федотов<sup>2</sup>, М.В. Гришко<sup>3</sup>, А.Е. Дюсембаев<sup>4</sup>

#### МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ИННОВАЦИИ В СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

**Аннотация.** В статье рассматриваются вопросы диффузии инновации в социальных системах, динамика распространения инноваций в социальных сообществах под воздействием СМИ и межличностной коммуникации, процесс формирования общественного мнения. Были проанализированы модели распространения инноваций. На основе модифицированного нами модели Басса реализована практическая реализация моделирования распространения инноваций и факторы, влияющие на процесс распространения. Для этого мы выбрали программный продукт имитационного моделирования Anylogic. Как показывают результаты исследования, процессы распространения разных информационных сообщений в социальных системах могут определять массовое сознание и, соответственно, массовое поведение людей в этих социальных и экономических системах.

**Ключевые слова:** диффузия инноваций, социальная система, межличностная коммуникация, влияние СМИ, распространение идей в обществе, динамика распространения инноваций.

#### Авторлар туралы мәлімет:

Федотов Анатолий Михайлович - PFA корреспондент-мүшесі, ф-м.ғ.д, профессор, PFA СБ Есептеу технологиялар институты, Новосібір, Ресей;

Дюсембаев Ануар Ермуқанович - ф-м.ғ.д, профессор, аль-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық Университеті, Алматы, Қазақстан;

Мурзахметов Асланбек Нурбекович - аль-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық Университетінің докторанты, Алматы, Қазақстан;

Гришко Михайл Валерович - аль-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық Университетінің докторанты, Алматы, Қазақстан.

## NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

## PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 6, Number 316 (2017), 45 – 51

**S.A. Orazbayev, T.S. Ramazanov,  
M.K. Dosbolayev, M.T. Gabdullin, D.B. Omirbekov**

NNLOT, Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan  
050040, Al-Farabi avenue, 71  
e-mail: [omirbekov@physics.kz](mailto:omirbekov@physics.kz)

## THE METHOD OF OBTAINING HYDROPHOBIC SURFACES IN THE PLASMA OF RF DISCHARGE

**Abstract.** The aim of this work was to obtain superhydrophobic surfaces in a plasma medium. The experiment was carried out using the PECVD method in two different modes: constant and pulsing. The surface roughness was obtained by applying nanoparticles synthesized in a plasma in a mixture of argon and methane. The resulting particles were deposited on the surface of silicon and glass materials. The dependence of the contact angle on the nanoparticle application cycle on the surface was obtained. The contact angle increased linearly depending on the number of cycles, until it reached  $160^\circ$  at 150-160<sup>th</sup> cycles, after that the increase in cycles does not affect the contact angle, since the saturation process is in progress. Also the effect of the working gas composition on the hydrophobicity of the surface was studied. At low concentrations of methane (1%) only particles are synthesized in the working gas, and hydrophobicity is unstable, with an increase in methane concentration (7%) nanofilms are synthesized from nanoclusters, and surface hydrophobicity is relatively stable. In addition, a pulsing plasma mode was used to obtain superhydrophobic surfaces. A nanofilm consisting of nanoclusters with a diameter of 4-10 nm was synthesized. The hydrophobicity of the sample showed that the strength of the nanofilm was stable in comparison with the sample obtained in the first mode, but the contact angle was lower. The obtained samples were examined using SEM, SPM, optical analysis, and their contact angles were determined. The experiment was carried out at various plasma parameters (gas pressure, discharge power). It was found that when a superhydrophobic surface is treated with a buffer plasma (argon or nitrogen), it becomes superhydrophilic.

**Key words:** nanoparticles, RF discharge, superhydrophobic surfaces, superhydrophilic surfaces.

ӨОЖ 537.523/.527

**С.А. Оразбаев, Т.С. Рамазанов, М.Қ. Досболаев,  
М.Т. Габдуллин, Д.Б. Өмірбеков**

АТҰНЗ, әл-Фараби атындағы ҚазҰУ

## ЖОҒАРЫ ЖИІЛІКТІ РАЗРЯД ПЛАЗМАСЫНДА СУПЕРГИДРОФОБТЫ БЕТТЕР АЛУ ӘДІСІ

**Аннотация.** Бұл жұмыстың негізгі мақсаты плазмалық ортада «PECVD» әдісі көмегімен супергидрофобты беттер алу. Тәжірибе екі түрлі режимде жүргізілді: үзіксіз және пульстік режим. Беттің кедір-бұдырлығы плазмада пайда болған нанобөлшектер көмегімен алынды. Аргон және метан газдарының қоспасын қолдану негізінде синтезделген нанобөлшектер кремний және шыны материалдардың бетіне қондырылды. Содан кейін су тамшысының бетпен жанасу бұрышының нанобөлшектерді бетке қондыру циклына тәуелділігі тұрғызылды. Бөлшектерді қондыру циклін көбейткен сайын жанасу бұрышы да артатындығы, бірақ 150-160 циклдан кейін бұрыш  $160^\circ$  қанығуға жететіндігі анықталды. Сондай-ақ, жұмыс газы құрамының (аргон мен метан газдарының қоспасы) гидрофобтылыққа әсері зерттелді. Газ құрамында метан 1 пайыз болса, тек нанобөлшектер синтезделіп, беттің гидрофобтылығы тұрақсыз болады, ал метанның үлесін 7 пайызға дейін көбейтсек, онда нанокластерлерден тұратын наноқабықша алынып, беттің гидрофоб-

тылығы салыстырмалы түрде жақсартындығы анықталды. Сонымен бірге, супергидрофобты бет алу мақсатында плазманың пульстік жану режимі пайдаланылды. Онда диаметрі 4-10 нм болатын нанокластерлерден тұратын наноқабықша синтезделді. Алынған үлгінің гидрофобтылығы бірінші режимде алынған үлгімен салыстырғанда наноқабықшаның беріктігі жақсы, бірақ бетпен жанасу бұрышы төмен екендігін көрсетті. Алынған үлгілерге СЭМ, СЗМ, оптикалық және жанасу бұрышын есептейтін анализдер жасалынды. Тәжірибе плазманың әртүрлі параметрлерінде (газ қысымы, разряд қуаты) жүргізілді. Супергидрофобты бетті буферлі плазмамен (аргон немесе азот) өңдеген кезде, бет супергидрофильді қасиетке ие болатындығы байқалды.

**Түйін сөздер:** нанобөлшектер, ЖЖ разряд, супергидрофобты беттер, супергидрофильді беттер.

### **Кіріспе**

Бәрімізге белгілі, егер қатты беттің су тамшысымен жанасу бұрышы  $\alpha > 90^\circ$  болса, онда ол гидрофобты, ал егер  $\alpha < 90^\circ$  болса, онда гидрофильді деп аталады. Сонымен қатар, жанасу бұрышы  $150^\circ$ -тан асатын супергидрофобты және ЖБ  $10^\circ$ -тан төмен супергидрофильді беттер де бар. Мұндай беттерді мұз қатуға, коррозияға қарсы, өздігінен тазаланатын материалдар алуда, медицинада және т.б. салаларда қолдану қарастырылған [1-4]. Бетке судың жұғуы негізінен екі факторға тәуелді: химиялық құрамы және беттің кедір-бұдырлығы. Егерді осы екі факторды ұтымды таңдайтын болсақ, онда жанасу бұрышы  $180^\circ$ -қа жуық (лотос эффектісі) супергидрофобты материалдар алуға болады [5]. Гидрофобты беттер алудың бірнеше әдістері бар, олар: беттерді плазмамен өрнектеу, плазмалық қондыру, лазерлік өңдеу, золь-гель, химиялық өрнектеу, литография және т.б. [6-19].

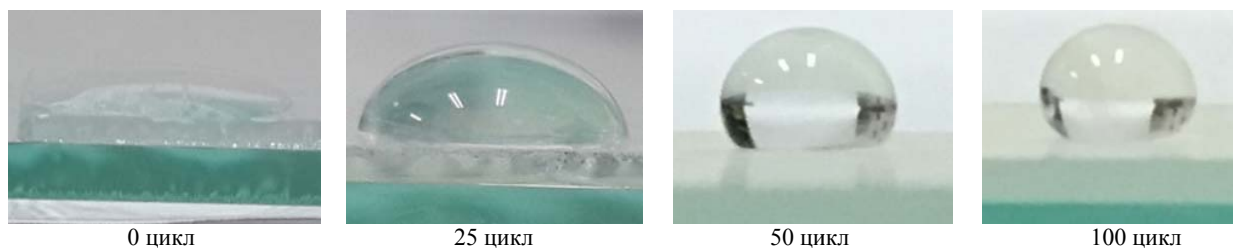
Келесі, [20] жұмыста кедір-бұдырлық деңгейі 20 нм болатын гидрофобты беттер плазмалық өңдеу әдісі көмегімен алынған. Ал [11] жұмыстың авторлары «LDPE» кристаллизациялану параметрлерін басқара отырып, әртүрлі құрылымды, жанасу бұрышы  $173^\circ$  болатын супергидрофобты беттер дайындаған. Тағы бір әдіс түрі [21] жұмыста көрсетілген, ол жерде золь-гель әдісі негізінде шыны бетке нанокластерлер мен нанобөлшектерден тұратын құрылымдық қабықшалар отырғызылған. Гидролиз және конденсация процесстерін басқара отырып та, беттің құрылымын реттеуге болатындығын зерттеген. Яғни, бұл әдіс екі деңгейден тұрады: беттің кедір-бұдырлығы золь-гель әдісімен, ал мөлдірлігі фторидпен өңдеу арқылы алынған. Сонымен, супергидрофобты беттерді алудың бірнеше әдістері бар. Бірақ, осы әдістермен алынған нәтижелерді саралай келе, әрқайсысының өзіндік кемшіліктері мен артықшылықтары бар екендігін көруге болады.

Бұл жұмыста «PECVD» әдісі көмегімен супергидрофобты беттер алудағы эксперименттік нәтижелер келтірілген. Беттің кедір-бұдырлығының плазма параметрлері мен газ құрамына тәуелділігі эксперименттік түрде зерттелген.

### **Тәжірибелік бөлім және алынған нәтижелер**

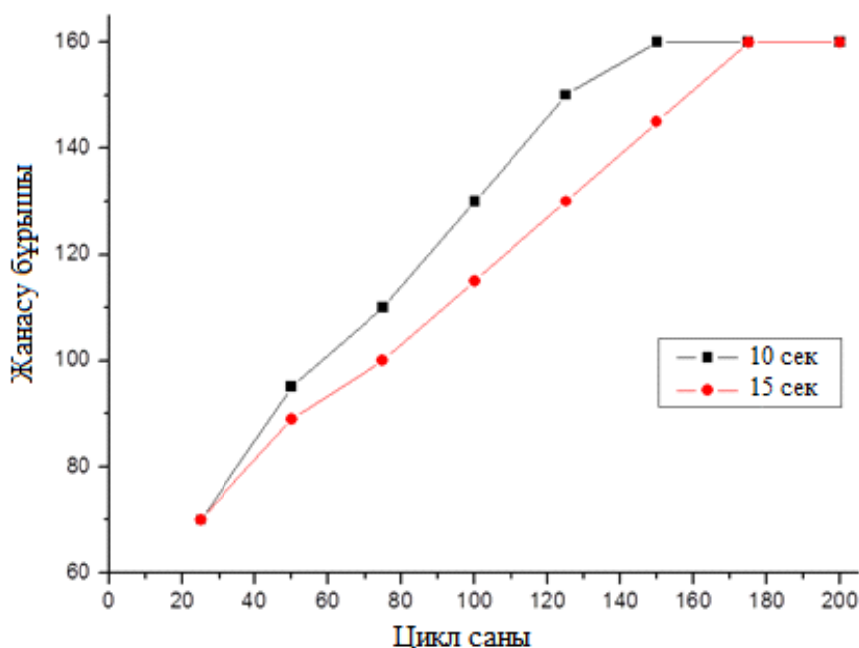
Тәжірибелік қондырғы вакуумдық жүйе, қорек көзі және жұмыс камерасынан тұрады. ЖЖ генератор мен сәйкестендіруші құрылғы қорек көзін құрайды. Тәжірибелік қондырғының басты бөлігі жұмыс камерасында орналасқан, бір-біріне параллель электродтар жүйесі болып табылады. Жоғарғы электродқа жоғары жиілікті кернеу беріледі, ал төменгі электрод жерге жалғанған. Электродтардың арақашықтығы 3 см, ал диаметрлері, сәйкесінше, 8 см және 10 см. Тәжірибелік қондырғының толық сипаттамасы [22] жұмыста көрсетілген. Жұмыс газы ретінде аргон және метан газдарының қоспасы алынды. Разряд қуаты 5-50 Вт, газ қысымы 0,1-1 Тор аралығында өзгертіліп отырылды.

Плазма жанғаннан кейін, белгілі параметрлерде  $\text{Ar}/\text{C}_2\text{H}_4$  газ қоспасы болғандықтан, көміртекті нанобөлшектері синтезделеді [23]. Плазманы сөндіргеннен соң, бұл нанобөлшектердің белгілі бір бөлігі төменгі электродта орналасқан төсеніштің бетіне наноқабықша ретінде қонады. Бұл процес циклді түрде жүргізіліп отырады. Осылайша, төсеніштегі нанобөлшектердің мөлшерін, нанобөлшектерден тұратын қабықшалардың кедір-бұдырлығы мен қалыңдығын нанобөлшектерді қондыру циклінің санымен басқаруға болады. Ол өз кезегінде әртүрлі көміртекті нанобөлшектерден тұратын кедір-бұдырлы бет алуға әсер етеді. Циклдің саны өскен сайын, төсеніштегі нанобөлшектердің тығыздығы артады, ол жанасу бұрышының жоғарылауына алып келеді. Төмендегі 1-суретте әртүрлі цикл санында алынған нанокластерлі қабықшалы беттерге су тамшысының жұғуы көрсетілген.



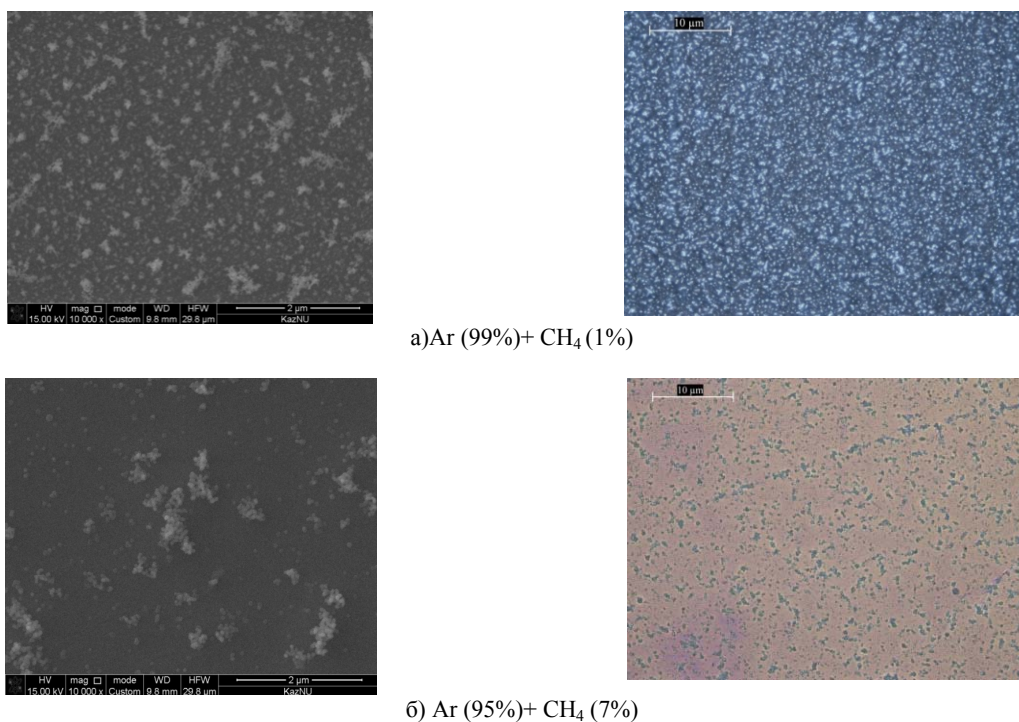
Сурет 1 – Әртүрліцикл санында алынған гидрофобты беттер

Алынған тәжірибелік нәтижелердің негізінде, жанасу бұрышының нанобөлшектерді қондыру циклының санына және ұзақтығына тәуелділігі тұрғызылды (2 - сурет). Графиктен көріп отырғанымыздай, жанасу бұрышы циклдың санына сызықты тәуелді өсуде, бірақ 150-160 циклдан кейін жанасу бұрышы  $160^\circ$  қанығуға жетіп, ары қарай цикл санына тәуелсіз болады. Сонымен қатар, бұл графикте әртүрлі циклдің ұзақтығының қисықтары келтірілген. Бұлжердегі ерекшелікті былайша түсіндіруге болады: плазмада белгілі параметрлерде уақытқа тәуелді белгілі өлшемдегі нанобөлшектер синтезделеді, мысалы, 10 секундта диаметрлері  $\sim 70-90$  нм, ал 15 секундта  $\sim 120-170$  нм өлшемдегі бөлшектер синтезделеді. Осылайша, нанобөлшектердің өлшемдеріне байланысты, жанасу бұрышына әсер ететін беттің кедір-бұдырлығыда өзгереді.



Сурет 2 – Жанасу бұрышының нанобөлшектерді қондыру циклының санына және ұзақтығына тәуелділігі

Сонымен қатар, жұмыс газының құрамының гидрофобтылыққа әсері зерттелді.  $Ar/CH_4$  газ қоспасындағы метанның үлесінің төменгі мәнінде (1%) тек нанобөлшектер синтезделеді және олардың бір-бірімен байланысы өте әлсіз, ал қоспадағы метан газының үлесін 7 пайызға дейін жоғарылататын болсақ, онда нанобөлшектермен қатар наноқабықша синтезделеді. Оны 3-суретте көрсетілген СЭМ көріністер мен оптикалық микроскоп көмегімен алынған фотосуреттерден байқауға болады.



Сурет 3 – Газдың әртүрлі құрамында алынған үлгілердің СЭМ және оптикалық фотосуреттері

Егер төсеніш бетіндегі наноқабықша тек нанобөлшектерден құралып, бір-бірімен байланысы өте әлсіз болса, онда ол су тамшысымен әсерлескенде беттің гидрофобтылығы бірден жойылады (4а-сурет), ал егер төсеніш бетіндегі қабықша нанобөлшектермен қатар наноқабықшадан тұратын болса, онда беттің гидрофобтылығы сақталады, себебі қабықша нанобөлшектер арасындағы байланыстырушы элемент қызметін атқарады (4б-сурет).

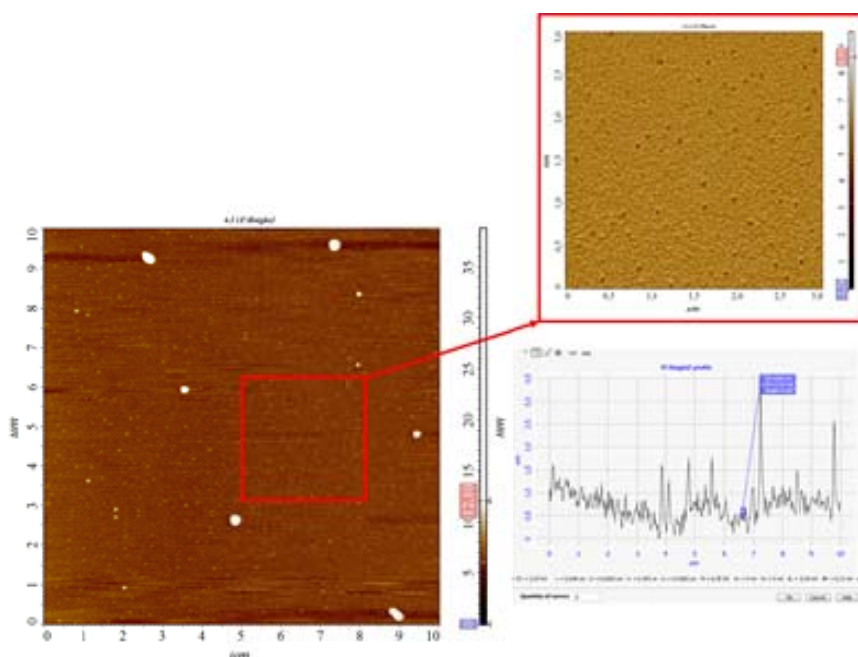


Сурет 4 – Газдың әртүрлі құрамында алынған үлгілердің фотосуреті

Сондай – ақ, тұрақты супергидрофобты бет алу үшін, плазманың пульстік жану режимі пайдаланылды. Бұл режимде плазманың жану уақыты салыстырмалы түрде өте аз болғандықтан, диаметрі 4-10 нм болатын бөлшектер мен наноқабықша синтезделеді. Алынған үлгінің гидрофобтылығы бірінші тұрақты (үздіксіз) режиммен алынған үлгімен салыстырғанда төсенішпен беріктігі жақсы, бірақ жанасу бұрышы төмен екендігін көрсетті. Себебі өлшемдері өте кіші бөлшектер синтезделген, ол қабықшаның кедір бұдырлығының биіктігі аласаболуына әкеп соғады.

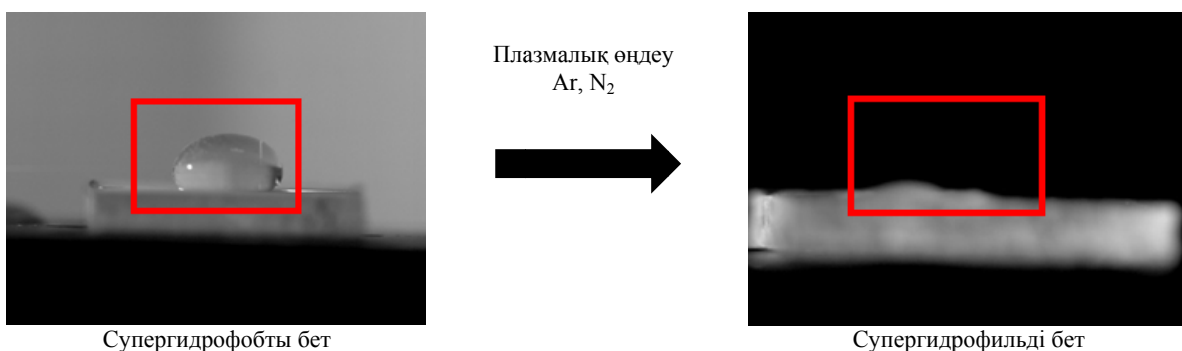


Бұл үлгі СЗМ көмегімен зерттелді, ол үлгінің беті кедір-бұдырлы екендігін дәлелдейді және кедір бұдырлығының биіктігі салыстырмалы түрде өте төмен, бұл нәтижелерді 5-суреттен көруге болады.



Сурет 5 – Пульстік режимде алынған үлгінің СЗМ көрінісі

Тәжірибе барысында, алынған супергидрофобты бетті буферлі плазмамен (аргон немесе азот) өндеген кезде, беттің гидрофобтылығы бұзылып, бет супергидрофильді қасиетке ие болатындығы анықталды. Бетті плазмамен өндеу уақыты ұзарған сайын, жанасу бұрышы төмендейді. 6-суретте супергидрофобтылықтан супергидрофильділікке трансформациялау көрінісі көрсетілген.



Сурет 6 – Супергидрофобтылықтан супергидрофильділікке трансформациялау көрінісі

### Қорытынды

Осылайша, бұл жұмыста ЖЖ разряд плазмасында PECVD әдісі көмегімен супергидрофобты және супергидрофильді беттер алынды. Беттің кедір-бұдырлық деңгейін нанобөлшектердің бетке қондыру циклының санымен басқаруға, ал жұмыстық газ құрамын өзгерту негізінде беттің гидрофобтылық қасиетін өзгеруге болатындығы тәжірибелік түрде анықталды. Алынған үлгілерге СЭМ, СЗМ, оптикалық және жанасу бұрышын есептейтін анализдер жасалынды. Тәжірибе плазманың әртүрлі параметрлерінде (газ қысымы, разряд қуаты) жүргізілді. Сонымен қатар, супергидрофобты бетті буферлі плазмамен (аргон немесе азот) өндеген кезде, бет супергидрофильді қасиетке ие болатындығы байқалды.

ӘДЕБИЕТ

- [1] Wang Sh., Liu K., Yao X., and Jiang L. (2015) Bioinspired Surfaces with Superwettability: New Insight on Theory, Design, and Applications, *Chem. Rev.*, 115(16):8230–8293. DOI: 10.1021/cr400083y
- [2] Levkin P.A., Svec F. and Frechet J.J.M. (2009) Porous Polymer Coatings: a Versatile Approach to Superhydrophobic Surfaces, *Advanced Functional Materials*, 19 (12): 1993–1998. DOI: 10.1002/adfm.200801916
- [3] Bhushan B., Jung Y.C. and Koch K. (2009) Self-Cleaning Efficiency of Artificial Superhydrophobic Surfaces, *Langmuir*, 25 (5): 3240–3248. DOI: 10.1021/la803860d
- [4] Zhang X., Shi F., Niu J., Jiang Y.G. and Wang Z.Q. (2008) *Journal of Materials Chemistry*, 18 (6): 621–633. DOI: 10.1039/B711226B
- [5] D. Ebert, B. Bhushan, J. (2012) Durable Lotus-effect surfaces with hierarchical structure using micro- and nanosized hydrophobic silica particles, *Colloid Interface Sci.*, 368: 584–591. DOI: 10.1016/j.jcis.2011.09.049
- [6] Du X., He J. (2011) A Self-Templated Etching Route to Surface-Rough Silica Nanoparticles for Superhydrophobic Coatings, *ACS Appl. Mater. Interfaces*, 3: 1269–1276. DOI: 10.1021/am200079w
- [7] Song X., Zhai J., Wang Y., Jiang L. (2006) Self-assembly of amino-functionalized monolayers on silicon surfaces and preparation of superhydrophobic surfaces based on alkanolic acid dual layers and surface roughening, *J. Colloid Interface Sci.*, 298 (1): 267–273. DOI: 10.1016/j.jcis.2005.11.048
- [8] Jiang L., Zhao Y., Zhai J. (2004) A Lotus-Leaf-like Superhydrophobic Surface: A Porous Microsphere/Nanofiber Composite Film Prepared by Electrohydrodynamics, *Angew. Chem., Int. Ed.*, 43: 4338–4341. DOI: 10.1002/anie.200460333
- [9] Tadanaga, K., Morinaga, J., Matsuda, A., Minami, T. (2000) Superhydrophobic–Superhydrophilic Micropatterning on Flowerlike Alumina Coating Film by the Sol–Gel Method, *Chem. Mater.*, 12: 590–592. DOI: 10.1021/cm990643h
- [10] Yamanaka M., Sada K., Miyata M., Hanabusa K., Nakano K. (2006) Construction of superhydrophobic surfaces by fibrous aggregation of perfluoroalkyl chain-containing organogelators, *Chem. Commun.*, 0: 2248–2250. DOI: 10.1039/B601485B
- [11] Lu X., Zhang C., Han Y. (2004) Low-Density Polyethylene Superhydrophobic Surface by Control of Its Crystallization Behavior, *Macromol. Rapid Commun.*, 25 (18): 1606–1610. DOI: 10.1002/marc.200400256
- [12] Li, X., Chen G., Ma Y., Feng L., Zhao H., Jiang L., Wang F. (2006) Preparation of a super-hydrophobic poly(vinyl chloride) surface via solvent–nonsolvent coating, *Polymer*, 47 (2): 506–509. DOI: 10.1016/j.polymer.2005.08.097
- [13] Feng L., Li S., Li H., Zhai J., Song Y., Jiang L., Zhu D. (2002) Super-Hydrophobic Surface of Aligned Polyacrylonitrile Nanofibers, *Angew. Chem.*, 114 (7): 1269–1271. DOI: 10.1002/1521-3757(20020402)114:7<1269::AID-ANGE1269>3.0.CO;2-E
- [14] Cao X., Qu M., Zhao G., Wang Q., Zhang J. (2008) Fabrication of superhydrophobic surfaces by a Pt nanowire array on Ti/Si substrates, *Nanotechnology*, 19: 055707. DOI: 10.1088/0957-4484/19/19/199801
- [15] Kim D.-H., Kim Y., Kim B.M., Ko J.S., Cho C.-R., Kim, J.- M. J. (2011) Uniform superhydrophobic surfaces using micro/nano complex structures formed spontaneously by a simple and cost-effective nonlithographic process based on anodic aluminum oxide technology, *Micromech. Microeng.*, 21: 045003. DOI: 10.1088/0960-1317/21/4/045003
- [16] Wang S., Feng L., Jiang L. (2006) One-Step Solution-Immersion Process for the Fabrication of Stable Bionic Superhydrophobic Surfaces, *Adv. Mater.*, 18(6): 767–770. DOI: 10.1002/adma.200501794
- [17] Meng, H. F., Wang, S. T., Xi, J. M., Tang, Z. Y., Jiang, L. (2008) Facile Means of Preparing Superamphiphobic Surfaces on Common Engineering Metals, *J. Phys. Chem. C*, 112 (30): 11454–11458. DOI: 10.1021/jp803027w
- [18] Qingjun W., Yiwu Q., Junsheng Z., Qingmin C. (2006) Preparation of super water-repellent membrane by radiation-induced copolymerization, *Surf. Coat. Technol.* 200: 5493–5497. DOI: 10.1016/j.surfcoat.2005.07.069
- [19] Zhao N., Shi F., Wang Z., Zhang X. (2005) Combining Layer-by-Layer Assembly with Electrodeposition of Silver Aggregates for Fabricating Superhydrophobic Surfaces, *Langmuir*, 21 (10): 4713–4716. DOI: 10.1021/la0469194
- [20] Fresnais J., Chapel J.P., (2006) Synthesis of transparent superhydrophobic polyethylene surfaces, *Surf. Coat. Technol.*, 200 (18,19): 5296–5305. DOI: 10.1016/j.surfcoat.2005.06.022
- [21] Shang H.M., Wang Y., Limmer S.J., Chou T.P., Takahashi K., Cao G.Z. (2005) Optically transparent superhydrophobic silica-based films, *Thin Solid Films*, 472 (1–2): 37–43. DOI: 10.1016/j.tsf.2004.06.087
- [22] Orazbayev S.A., Omirbekov D.B., Gabdullin M.T., Dosbolayev M.K., Ramazanov T.S. (2016) The influence of gas temperature on size and structure of the dust nanoparticles. *News of the NAS of the RK, phys.-math. series*, 6 (310): 78–84 (in Russian)
- [23] Orazbayev S.A., Ramazanov T.S., Dosbolayev M.K., Gabdullin M.T., Omirbekov D.B. Synthesis of carbon nanoparticles by gas-phase deposition in a low-temperature RF discharge plasma, *Proceedings of the XIII International Conference, Kursk, Russia, Part 1, P. 368–374.* (in Russian)

С.А. Оразбаев, Т.С. Рамазанов, М.Қ. Досболаев,  
М.Т. Габдуллин, Д.Б. Өмірбеков

ННЛОТ, КазНУ им. аль-Фараби

### СПОСОБ ПОЛУЧЕНИЯ СУПЕРГИДРОФОБНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ В ПЛАЗМЕ ВЧ РАЗРЯДА

**Аннотация.** Целью данной работы являлось получение супергидрофобных поверхностей в плазменной среде. Эксперимент проводился с использованием PECVD метода в двух разных режимах: постоянном и пульсирующем. Шероховатость поверхности была получена с помощью нанесения наночастиц, синтезированных в плазме в смеси аргона и метана. Полученные частицы были осаждены на поверхности кремния и стеклянных материалов. Была получена зависимость контактного угла от цикла нанесения наночастиц на поверхность. Контактный угол линейно увеличивался в зависимости от числа циклов, пока он не достигал значения  $160^\circ$  при 150-160 циклах, после чего увеличение циклов не влияет на контактный угол, так как идет процесс насыщения. Также было исследовано влияние состава рабочего газа на гидрофобность поверхности. При низких концентрациях метана (1%) в рабочем газе синтезируются только частицы, и гидрофобность неустойчива, а при увеличении концентрации метана (7%) синтезируется нанопленка из нанокластеров, и гидрофобность поверхности относительно устойчива. Кроме того, для получения супергидрофобных поверхностей использовался пульсирующий режим плазмы. Была синтезирована нанопленка, состоящая из нанокластеров диаметром 4-10 нм. Гидрофобность образца показала, что прочность нанопленки была стойкой по сравнению с образцом, полученным в первом режиме, но угол контакта был ниже. Полученные образцы были исследованы с помощью СЭМ, СЗМ, оптического анализа, и были определены их контактные углы. Эксперимент проводился при различных параметрах плазмы (давление газа, мощность разряда). Было обнаружено, что при обработке супергидрофобной поверхности буферной плазмой (аргона или азота), она становится супергидрофильной.

**Ключевые слова:** наночастицы, ВЧ разряд, супергидрофобная поверхность, супергидрофильная поверхность.

**NEWS**

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

**PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES**

ISSN 1991-346X

Volume 6, Number 316 (2017), 52 – 55

**Kh.A. Sarsenbayev<sup>1</sup>, B.S. Khamzina<sup>2</sup>, G.A. Koldassova<sup>2</sup>, G.B. Issayeva**

<sup>1</sup>South-Kazakhstan State University named after M. Auezov, Shymkent, Kazakhstan;

<sup>2</sup>Kazakh National University named after al-Farabi, Almaty, Kazakhstan

E-mail: [sarsenbayev80@mail.ru](mailto:sarsenbayev80@mail.ru), [kuzyamake@mail.ru](mailto:kuzyamake@mail.ru)

**FEATURES OF APPLICATION OF DOMESTIC  
AND FOREIGN TECHNOLOGIES OF WASHING  
OF WELLS AT DEVELOPMENT OF WELLS**

**Abstract.** In presented work is the features of application of domestic and foreign technology of washing of horizontal wells are submitted in view of influence of return washing of a trunk of a well.

**Key words:** drilling of wells, horizontal well, slime, washing of well, drilling fluid.

УДК 621.233.5

**Х.А. Сарсенбаев<sup>1</sup>, Б.С. Хамзина<sup>2</sup>, Г.А. Колдасова<sup>2</sup>, Г.Б. Исаева**

<sup>1</sup>Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауэзова, Шымкент, Казахстан;

<sup>2</sup>Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан

**ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ОТЕЧЕСТВЕННЫХ  
И ЗАРУБЕЖНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ ПРОМЫВКИ СКВАЖИН  
ПРИ ОСВОЕНИИ СКВАЖИН**

**Аннотация.** В данной работе представлено особенности применения отечественных и зарубежных технологий промывки горизонтальных скважин с учетом влияния обратной промывки ствола скважины.

**Ключевые слова:** бурение скважин, горизонтальная скважина, шлам, промывка скважины, буровой раствор.

При ретроспективном анализе научно-технических публикаций в области технологии промывки горизонтальных скважин следует отметить, что основное внимание отечественных и зарубежных исследователей было уделено обеспечению качества очистки ствола от выбуренной породы. Результаты многочисленных исследований нашли свое отражение в двух технологических документах, которые используются в отечественной практике строительства газовых скважин [1]. Особое практическое значение имеют «эмпирические правила повышения эффективности очистки ствола сильно искривленных скважин», предложенные сотрудниками М - I Drilling Fluids Мориа Замора и Поль Хэнсоном [2]. Эти правила разработаны с учетом эффекта Бойкотта, суть которого заключается в том, что скорость осаждения шлама в наклонном стволе выше, чем в вертикальном. Это явление было открыто Woocott A.E. в 1920 году при изучении осаждения «кровяных тел» в стеклянных пробирках. Основные зарубежные публикации по очистке горизонтального ствола связаны с иностранными исследователями Zamora M., Byrd B., Jefferson D.T., Gao E., Young A.C., Powell J.W. и др. В отечественной истории развития исследований технологии промывки при

горизонтальном бурении сформировалось несколько направлений, которые условно можно объединить в академическое (Калинин А.Г., Крылов В.Н., Ангелопуло О.К., Леонов Е.Г. и др.) и прикладное (Пеньков А.И., Потапов А.Г., Никитин Б.А., Андерсон Б.И., Рябоконт С.А. и др.). Краткие сведения об основных научных исследованиях представителей этих направлений приводятся ниже.

Лаврентьев В.С. и авторы [3] считают, что способ обратной промывки, используемый для очистки горизонтальной скважины, является наиболее эффективным. Этот способ в сочетании с использованием растворов с оптимальной реологией и вязкоупругих разделителей позволяет решить проблему выноса шлама. Для проводки горизонтального ствола предложен ингибированный раствор на основе хлорида кальция применение, которого обеспечивает качество вскрытия пласта горизонтальным стволом [4]. Пеньковым А.И., Вахрушевым Л.П. в работе [5] в качестве альтернативы растворам на нефтяной основе для проводки горизонтальных скважин предложены использовать полиалкиленгликолевые растворы. Иванов В.И. считает, что для повышения эффективности ствола горизонтальных скважин следует использовать вибрацию бурильной колонны, профилактические промывки и периодические обработки раствора реагентами-структурообразователями [6]. В работе [7] отмечена перспективность применения для горизонтального вскрытия пласта эмульсионного бурового раствора на основе нефти. Андреевым Б.А. с авторами работы [7] для горизонтального бурения боковых стволов разработан состав полигликолиевого глинистого раствора на основе полианионной целлюлозы и безглинистые растворы на основе пластовой воды и полимеров типа Poly-Кеш Б. Крылов В.И. [8] отмечает, что затраты на промывку горизонтальных скважин достигают 60% прямых затрат на их строительство, поэтому совершенствование технологии промывки весьма актуально. Технично-экономические показатели и качество строительства таких скважин в значительной степени определяют компонентный состав бурового раствора и гидравлика промывки ствола. В работе [9] хорватский исследователь Релгап Давейка обосновал перспективность применения при горизонтальном бурении смазывающих добавок на основе рапсового масла. Матьцин В.Н., Рябченко В.И. в работе [10] утверждают, что важнейшим методом улучшения выносящей способности бурового раствора является направленное регулирование его реологии, но за счет этого в горизонтальных скважинах оседание шлама предотвратить не возможно. Эти авторы анализируя эффективность контроля реологических параметров бурового раствора с помощью ротационных вискозиметров типа ВСН с использованием уравнения Рейнера-Ривлин, пришли к выводу о необходимости применения при горизонтальном бурении промывочной жидкости с быстро формирующейся структурой. В работе [12] предлагается способ обоснованного выбора реологических параметров бурового раствора, при которых обеспечивается удовлетворительный вынос шлама. Паршуковой Л.А., Еланцевой С.Ю. и авторами работы показано, что в Западной Сибири применение буровых растворов повышенной плотности не обеспечивает необходимой устойчивости стенок скважины с углом более 45 град. Для решения этой проблемы перспективными считаются биополимерные растворы с ингибирующими свойствами.

Таким образом, экспериментально показано, что влияние состава раствора на устойчивость стенок с увеличением времени возрастает, при этом зависимость минимально допустимой плотности раствора от угла наклона и увеличения времени становится маловыраженной. Дуркин В.В. изучая особенности очистки горизонтального ствола доказал, что показатель нелинейности бурового раствора должен находиться в пределах 0,3-0,65. Для обработки раствора рекомендовано использовать ПАА и КМЦ. Для управления реологическими свойствами бурового раствора при бурении горизонтальных скважин авторами выше указанных работ были изучены и предложены новые отечественные полисахариды (ПАЦ, КМОЭЦ, ОЭЦ, ПС), обеспечивающие возможность снижения показателя нелинейности до 0,35-0,36 в т.ч. минерализованных (ингибированных) систем. Никитин Б.А., Пеньков А.И., Рябоконт С.А. в работах обобщили многочисленные исследования и регламентировали основные требования и методы проектирования технологических параметров буровых растворов. Эти работы следует считать основополагающими в области оптимизации технологии промывки горизонтальных скважин.

При анализе изученности технологии промывки горизонтальной скважины следует отметить малочисленность исследований этого процесса на стендовых установках. В связи с этим особо

выделяется работа Ликушина А.М. посвященная технологии очистки ствола наклонно-направленной скважины от шлама в осложнённых условиях, выполненная под руководством Тагирова К.М. Автором [12] экспериментально определены оптимальные значения скоростей восходящего шлама бурового раствора в зависимости от угла наклона скважины и для горизонтальных и субгоризонтальных стволов обоснована необходимость турбулизации потока в кольцевом пространстве.

Анализ научно-технических публикаций за последние 10 лет показывает, что основное направление совершенствования технологии промывки горизонтальных скважин связано с оптимизацией технологических параметров бурового раствора, обеспечивающих очистку ствола (транспорт выбуренной породы). Этому направлению посвящены многочисленные работы из которых следует выделить исследования Пенькова А.И., Калинина А.Г., Ангелопулло О.К., Потапова А.Г. Тагирова К.М., Андерсона Б.А., Крылова В.И., Матицина В.И., Никитина Б.А..

Остаются малоизученными особенности фрикционных процессов в горизонтальной скважине для оптимизации смазывающих свойств бурового раствора и эффективности передачи осевой нагрузки на долото.

Целенаправленно для условий Западной Сибири этому вопросу посвящены исследования Сушона Л.Я., Зарипова С.Е., Бастрикова С.Н., результаты которых обобщены в научной работе [13]. Экспериментально обосновано применение в качестве смазывающих добавок кремнийорганической жидкости и экологически безопасного реагента на основе рыбьих жировых отходов. Вопросы обеспечения устойчивости горизонтальных стенок скважины является наиболее сложными и по этой причине остаются практически не изученными, хотя эта проблема в практике буровых работ имеет многолетнюю историю [13]. Применительно к условиям горизонтального бурения могут быть использованы научные исследования Войтенко В.С., Новикова В.С., Зозули В.П., Шантарина В.Д. в которых устойчивость стенок скважины увязана с динамикой фильтрационных процессов жидкой фазы бурового раствора.

Таким образом, анализ изученности технологии промывки при горизонтальном бурении показывает, что дальнейшим направлением исследований наряду с оптимизацией реологических показателей бурового раствора для транспорта шлама следует считать обеспечение качества ствола за счёт сохранения устойчивости стенок скважины. В конечном итоге качество ствола определяет успешность цементирования скважины и её эксплуатационную надёжность.

В изучение этих процессов особое место занимают экспериментальные исследования. Но как показывает практика научных исследований моделирование процесса промывки горизонтального ствола в значительной степени осложнено многофакторностью и неопределённостью геолого-технических параметров. Моделирование и изучение этого процесса отдельно по этапам (гидротранспорт, реология, фрикционные и фильтрационные явления) в большинстве своем приводят к ошибочным результатам. Ситуация усугубляется ещё тем, что полимерные компоненты бурового раствора вследствие механодеструкции изменяет его качество на 50-70%, а погрешность определения технологических свойств бурового раствора достигает до 27%. Вместе с этим установлено, что применяемые способы расчета динамического напряжения сдвига по «традиционному методу двух точек» завышает этот показатель иногда на порядок.

При вскрытии пластов с АНПД управление процессом промывки в значительной степени осложняется необходимостью применения облегченных буровых растворов – трехфазных пенных систем. Теоритические основы управления трехфазными пенами заложены отечественными исследователями под руководством Тагирова К.М.. Ими экспериментально изучены механизмы растворения и сжимаемости газовой фазы пенных систем, предложены технические решения для бурения скважин с использованием пен. Вместе с этим вопросы применения пенных систем для горизонтального бурения остаются малоизученными.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ахметов А. А. Капитальный ремонт скважин на Уренгойском месторождении. - Уфа: УГНТУ, 2000. - 220 с.
- [2] Отв. исполн. В.В. Масленников. Исследование вопроса образования песчано-глинистых пробок на забоях эксплуатационных скважин Медвежьего месторождения и рекомендации по их предотвращению. Отчет о НИР ТюменНИИгипрогаз. – Тюмень, 1975. – 22 с.

- [3] Масленников В. В., Ремизов В.В. Системный геофизический контроль разработки крупных газовых месторождений. — М.: Недра, 1993.
- [4] Масленников В. В., Федорцов В. К. Комплексное изучение выноса керна пород-коллекторов газовых скважин севера Тюменской области. Разведочная геофизика. — М.: Недра, 1980, вып. 90, с. 119 — 125.
- [5] Григорян А.М. Разветвленно-горизонтальные скважины. Нефтяное хозяйство, № 11, 1976. — С. 19-22.
- [6] Шианнезини Дж. Ф. Причины широкого распространения горизонтального бурения. Нефть, газ и нефтехимия за рубежом, № 3, 1989. — С. 6-12.
- [7] Махони Б.Дж. Рост объемов горизонтального бурения. Нефть, газ и нефтехимия за рубежом, № 10, 1988.
- [8] Харрисон Х. Мировой опыт успешного горизонтального бурения. Нефть, газ и нефтехимия за рубежом, № 3, 1989. — С. 15-22.
- [9] Море С. Успешное бурение горизонтальных скважин. *Petroleum Engineer International*, № 9, 1987. — 59 с.
- [10] Чандел В. Горизонтальное бурение: новое использование перспективного метода. *World Oil*, №6, 1986. — V 202.
- [11] Горизонтальные скважины в штате Онтарио (США). *Enhanced Recovery Week*, № 8, 1986. — С. 4 – 5.
- [12] Горизонтальное бурение скважин (штат Мичиган, США) // *Oil and Gas* 1986, V 84, № 23.
- [13] Дж Бозию. Горизонтальное бурение. *International pet role informational*, № 1, 1984. — С. 1-7.

## REFERENCES

- [1] Ahmetov A. A. *Kapital'nyj remont skvazhin na Urengojskom mestorozhdenii*. Ufa: UGNTU, 2000. 220 s.
- [2] Otv. ispoln. V.V. Maslennikov. Issledovanie voprosa obrazovaniya peschano-glinistyh probok na zaboiah jekspluacionnyh skvazhin Medvezh'ego mestorozhdenija i rekomendacii po ih predotvrashheniju. *Otchet o NIR TjumenNIIgiprogaz. Tjumen'*, 1975. 22 s.
- [3] Maslennikov V. V., Remizov V.V. *Sistemnyj geofizicheskij kontrol' razrabotki krupnyh gazovyh mestorozhdenij*. M.: Nedra, 1993.
- [4] Maslennikov V. V., Fedorcov V. K. Kompleksnoe izuchenie vynosa kerna porod-kollektorov gazovyh skvazhin severa Tjumenskoj oblasti. *Razvedochnaja geofizika*. M.: Nedra, 1980, вып. 90, s. 119-125.
- [5] Grigorjan A.M. Razvetvlenno-gorizonta'nye skvazhiny. *Neftjanoe hoz'jajstvo*, № 11, 1976. S. 19-22.
- [6] Shiannezini Dzh. F. Prichiny shirokogo rasprostraneniya gorizonta'nogo bureniya. *Neft', gaz i neftehimija za rubezhom*, № 3, 1989. S. 6-12.
- [7] Mahoni B.Dzh. Rost obemov gorizonta'nogo bureniya. *Neft', gaz i neftehimija za rubezhom*, № 10, 1988.
- [8] Harrison X. Mirovoj opyt uspešnogo gorizonta'nogo bureniya. *Neft', gaz i neftehimija za rubezhom*, № 3, 1989. S. 15-22.
- [9] More S. Uspeshnoe burenie gorizonta'nyh skvazhin. *Petroleum Engineer International*, № 9, 1987. 59 s.
- [10] Chandel V. Gorizonta'noe burenie: novoe ispol'zovanie perspektivnogo metoda. *World Oil*, №6, 1986. V 202.
- [11] Gorizonta'nye skvazhiny v shtate Ontario (SShA). *Enhanced Recovery Week*, № 8, 1986. S. 4-5.
- [12] Gorizonta'noe burenie skvazhin (shtat Michigan, SShA). *Oil and Gas*, 1986, V 84, № 23.
- [13] Dzh Bozio. Gorizonta'noe burenie. *International pet role informational*, № 1, 1984. S. 1-7.

**Х.А. Сарсенбаев<sup>1</sup>, Б.С. Хамзина<sup>2</sup>, Г.А. Колдасова<sup>2</sup>, Г.Б. Исаева**

<sup>1</sup>М. Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік университеті, Шымкент, Қазақстан,  
<sup>2</sup>әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан

## ҰҢҒЫМАЛАРДЫ ИГЕРУ КЕЗІНДЕ ҰҢҒЫМАЛАРДЫ ШАЮДАҒЫ ОТАНДЫҚ ЖӘНЕ ШЕТЕЛДІК ТЕХНОЛОГИЯЛАРДЫ ҚОЛДАНУ ЕРЕКШЕЛІКТЕРІ

**Аннотация.** Берілген жұмыста жазықтықта ұңғыманы бұрғылау үшін қазіргі таңдағы жергілікті және шетелдердегі ұңғыманы шаю технологиясын зерттеу нәтижелері қарастырылған. Қазіргі таңда қолданылып жатқан кері айдау жолдарының ерекшеліктері көрсетілген.

**Тірек сөздер:** ұңғымаларды бұрғылау, көлденең ұңғыма, шлам, ұңғыманы шаю, бұрғылау ерітіндісі.

**NEWS**

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN  
**PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES**

ISSN 1991-346X

Volume 6, Number 316 (2017), 56 – 66

УДК 53, 532.133, 621.3.018.72.025.1

**K. A. Kabylbekov, G. SH. Omashova**

M. Auezov South Kazakhstan State University, Shymkent, Kazakhstan  
[gauhar\\_omashova@mail.ru](mailto:gauhar_omashova@mail.ru)

**ORGANIZATION OF IMPLEMENTATION OF COMPUTER  
LABORATORY WORKS FOR THE STUDY  
OF HEAT TRANSFER WITH THE USE OF MATLAB SYSTEM**

**Abstract.** Models of organization of computer laboratory works with the calculations and visualization in the MATLAB language are proposed: 1) carry out the calculation and visualization of temperature distribution in the material along the transverse axis connecting two parallel plates. Represent a graph of temperature distribution; 2) carry out the calculation and visualization of temperature distribution in the substance along the radius of the coaxial cylinders. Represent a graph of the temperature distribution; 3) perform the calculation and visualization of temperature distribution in the substance inside two coaxial spheres along the radius of the sphere. Represent a graph of the temperature distribution; 4) carry out the calculation and visualization of temperature distribution inside a homogeneous sphere at a steady temperature of its surface. To represent a graph of the temperature distribution; 5) carry out the calculation and visualization of distribution of temperature difference along the rod connecting the two pieces of metal with different temperature. Depict the graph of the distribution of the temperature difference along the length of the rod. The results of calculations and visualization are presented in the form of graphs of temperature distribution.

**Key words.** Temperature distribution, substance, heat transfer, plate, cylinder, sphere.

**К.А.Кабылбеков, Г.Ш.Омашова**

Южно-Казахстанский государственный университет им. М.Ауэзова, Шымкент, Казахстан

**ОРГАНИЗАЦИЯ ВЫПОЛНЕНИЯ КОМПЬЮТЕРНЫХ  
ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ ПО ИССЛЕДОВАНИЮ ТЕПЛОПЕРЕНОСА  
С ПРИМЕНЕНИЕМ СИСТЕМЫ MATLAB**

**Аннотация.** Предлагается модели организация выполнения компьютерных лабораторных работ с проведением расчетов и визуализации на языке MATLAB: 1) Провести расчет и визуализацию распределения температуры в веществе, вдоль поперечной оси, соединяющей две параллельные пластины. Изобразить график распределения температуры; 2) Провести расчет и визуализацию распределения температуры в веществе, вдоль радиуса коаксиальных цилиндров. Изобразить график распределения температуры; 3) Провести расчет и визуализацию распределения температуры в веществе внутри двух коаксиальных сфер, вдоль радиуса сферы. Изобразить график распределения температуры; 4) Провести расчет и визуализацию распределения температуры внутри однородного шара при установившемся температуре его поверхности. Изобразить график распределения температуры; 5) Провести расчет и визуализацию распределения разности температур вдоль стержня, соединяющей два куска металла, имеющих разные температуры. Изобразить график распределения разности температур вдоль длины стержня. Результаты расчетов и визуализации представлены в виде графиков распределения температуры.

**Ключевые слова.** Распределение температуры, вещество, перенос тепла, пластина, цилиндр, шар.



В настоящее время, когда все образовательные учреждения Казахстана полностью обеспечены компьютерными средствами, интерактивными досками, Интернетом, программными ресурсами и почти все преподаватели прошли языковые и компьютерные курсы повышения квалификации очень важно предоставленной возможностью использования компьютерных обучающих программ, моделей, выполнения компьютерных лабораторных работ. Нами в течении ряда лет ведется работа по организации выполнения компьютерных лабораторных работ по физике с использованием ресурсов компании «Физикон» [1] и [2], разработанный в КазНУ им. Аль-Фараби под руководством профессора В.В.Кашкарова. Ряд моделей бланков организаций выполнения лабораторных работ внедрены в учебный процесс нашего университета и школах Южно-Казахстанской области [3]-[26]. Студенты обучающиеся по специальности 5В060400 и 5В011000-физика успешно осваивают дисциплину «Компьютерное моделирование физических явлений» которая является логическим продолжением дисциплин «Информационные технологии в преподавании физики», «Использование электронных учебников в преподавании физики». По этой дисциплине предусмотрено изучение и усвоение программного языка системы MATLAB, ознакомление ее огромными возможностями при моделировании и визуализации физических процессов. Предлагаемая статья посвящена организации выполнения лабораторных работ по исследованию теплопереноса, целью которой является проведение расчета и визуализации на языке MATLAB [27] с предоставлением результатов в виде графиков распределения температуры.

**Лабораторная работа №1:** «Распределение температуры в веществе, находящемся между двумя параллельными пластинами»

**Цель работы:** Провести расчет и визуализацию распределения температуры в веществе, вдоль поперечной оси, соединяющей две параллельные пластины.

Условия задачи. Найти распределение температур в веществе, находящемся между двумя параллельными пластинами, если последние поддерживаются при температурах  $T_1=290$  К и  $T_2=330$  К, расстояние между ними  $d=50$  мм и коэффициент теплопроводности вещества  $\kappa \sim \sqrt{T}$ . Распределение температур в веществе вдоль  $x$  определяется следующей формулой

$$T = T_1 \left( 1 + \frac{x}{l} \right) \left[ \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{1.5} - 1 \right]^{2/3},$$

где  $x$ —расстояние от пластины с температурой  $T_1$ .

Программа расчета и визуализации

```
>> d=0.050; % ввод параметров
>> T1=290; T2=330; % ввод параметров
>> x=0:0.01*d:d; % ввод вектора расстояния между пластинами
>> A=T2./T1; % вычисление отношений
>> T=T1.*(1+x./d).^A; % вычисление распределения температуры
>> plot(x,T,'k-') % визуализация
>> grid on % нанесение координатной сетки
>> xlabel('x, m') % нанесение названия оси
>> ylabel('T, K') % нанесение названия оси
>> title('T=F(x)') % нанесение названия графика
```

Результат расчета представлен на рис.1.

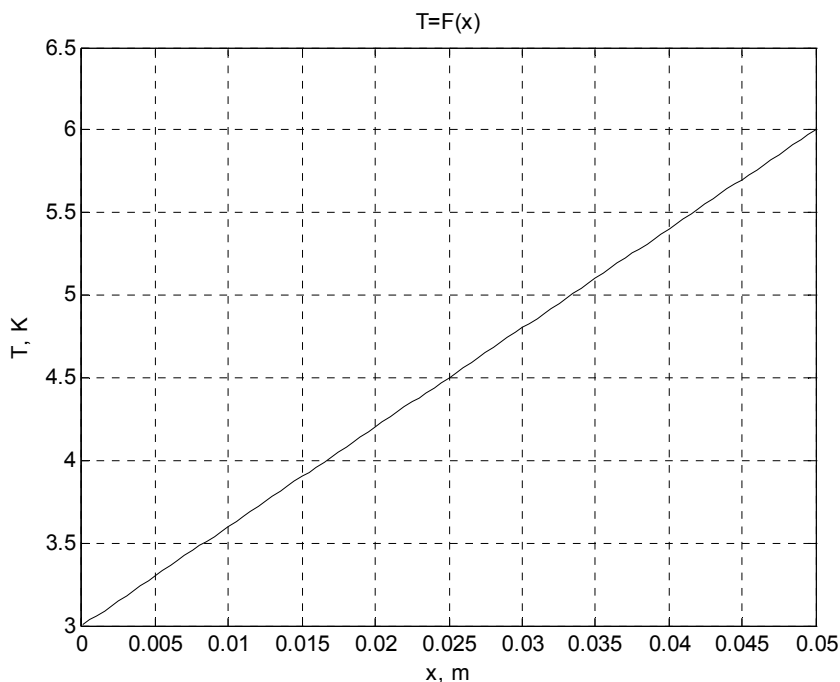


Рисунок 1 - Распределение температур в веществе вдоль x

**Лабораторная работа №2:** «Распределение температуры в веществе между двумя коаксиальными цилиндрами»

**Цель работы:** Провести расчет и визуализацию распределения температуры в веществе, вдоль радиуса цилиндров.

Условия задачи. Найти распределение температур в пространстве между двумя коаксиальными цилиндрами с радиусами  $r_1=50$  мм и  $r_2=100$  мм, заполненным теплопроводящим веществом, если температуры цилиндров постоянны и равны соответственно  $T_1=300$  и  $T_2=350$ К. Распределение температур в веществе вдоль  $r$  определяется следующей формулой,

$$T = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \ln\left(\frac{r}{r_1}\right),$$

где  $r$  – расстояние от цилиндра с температурой  $T_1$ .

Программа расчета и визуализации

```
>> r1=0.050; r2=0.10; T1=300; T2=350; % ввод параметров
>> r=0:0.005:0.1; % ввод вектора расстояния
>> T=T1+(T2-T1).*log(r./r1)./log(r2./r1); % вычисление распределения температуры
>> plot(r,T,'k-') % визуализация
>> grid on % нанесение координатной сетки
>> xlabel('r') % нанесение названия оси
>> ylabel('T') % нанесение названия оси
>> title('T=F(r)') % нанесение названия графика
```

Результат представлен на рис. 2.

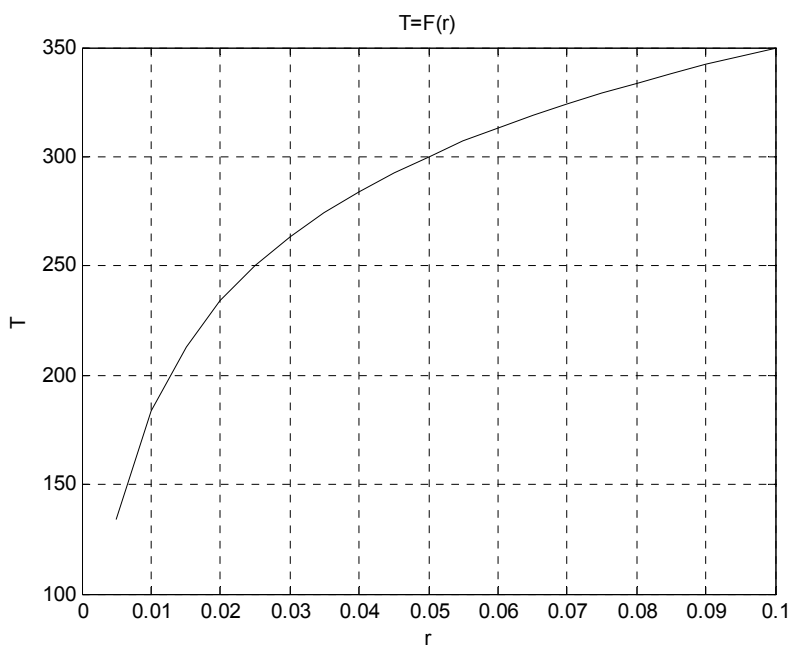


Рисунок 2- Распределение температур в веществе вдоль r

**Лабораторная работа №3:** «Распределение температуры в веществе между двумя коаксиальными сферами»

**Цель работы:** Провести расчет и визуализацию распределения температуры в веществе, вдоль радиуса сфер.

Условия задачи. Найти распределение температур в пространстве между двумя коаксиальными сферами с радиусами  $r_1=50$  мм и  $r_2=100$  мм, заполненным теплопроводящим веществом, если температуры сфер постоянны и равны соответственно  $T_1=300$  и  $T_2=350$ К.

Распределение температур в веществе вдоль r определяется следующей формулой,

$$T = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} \right),$$

где r –расстояние от сферы с температурой  $T_1$ .

Программа расчета и визуализации

```
>> r1=0.050; r2=0.100; % ввод параметров
>> T1=300; T2=350; % ввод параметров
>> r=0:0.001:0.1; % ввод вектора расстояния
>> b=(r-r1)/(r*r1); % вычисление коэффициента
>> a=(r1+r2)/(r1*r2); % вычисление коэффициента
>> T=T1+(T2-T1).*b./a; % вычисление распределения температуры
>> plot(r,T,'k-') % визуализация
>> grid on % нанесение координатной сетки
>> xlabel('r') % нанесение названия оси
>> ylabel('T') % нанесение названия оси
>> title('T=F(r)') % нанесение названия графика
```

Результат расчета представлен на рис.3.

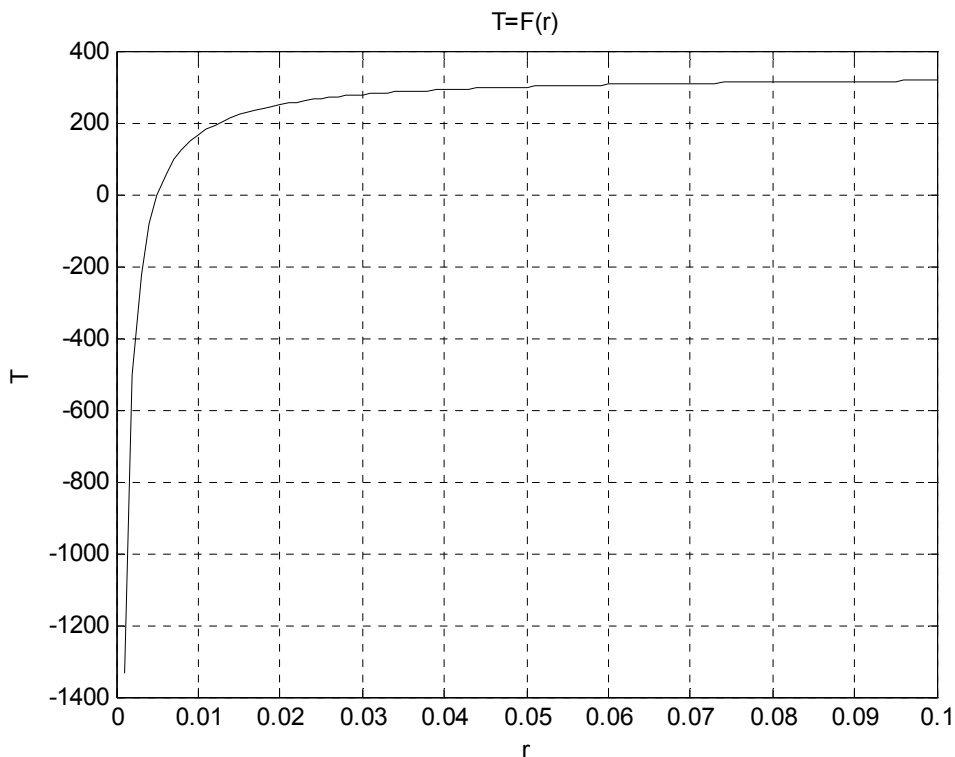


Рисунок 3 - Распределение температур в веществе вдоль r

**Лабораторная работа №4:** «Распределение температуры внутри однородного шара»

**Цель работы:** Провести расчет и визуализацию распределения температуры внутри однородного шара при установившемся температуре его поверхности.

Условия задачи. В однородном шаре, радиус которого  $R=1\text{ м}$  и коэффициент теплопроводности  $\kappa=0.143\text{ Вт/(м*К)}$ , выделяется тепловая мощность с объемной плотностью  $w=2\text{ Вт/м}^3$ . Найти распределение температуры в шаре, если установившаяся температура на его поверхности равна  $T_p=300\text{ К}$ .

Температура внутри шара вдоль r распределяется в соответствии с формулой

$$T = T_p + (R^2 - r^2) * w / 6\kappa$$

Программа расчета и визуализации

```
>> x=0.143; w=2; R=1; TP=300; % ввод параметров
>> r=0:0.1:1; % ввод вектора расстояния
>> T=TP+(R.^2-r.^2).*w./(6*x); % вычисление распределения температуры
>> plot(r,T,'r-') % визуализация
>> grid on % нанесение координатной сетки
>> xlabel('r') % нанесение названия оси
>> ylabel('T') % нанесение названия оси
>> title('T=F(r)') % нанесение названия графика
```

Результат расчета представлен на рис.4.

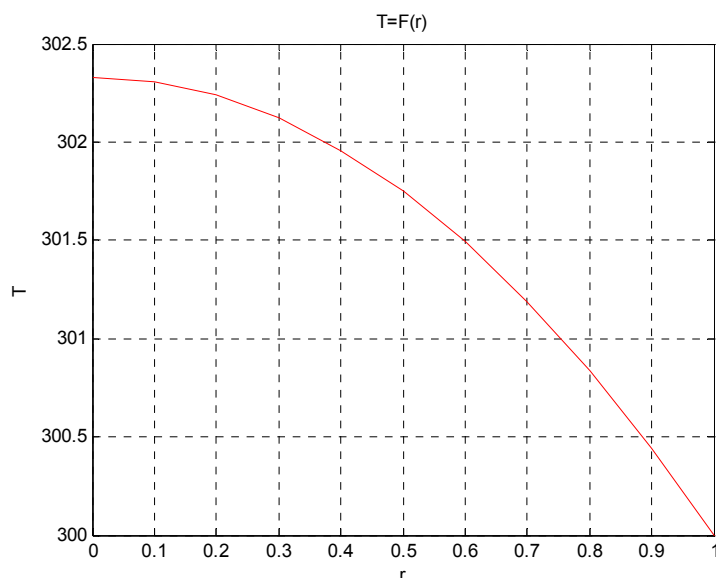


Рисунок 4 - Распределение температуры внутри шара вдоль r

**Лабораторная работа №5:** «Распределение температуры вдоль стержня, соединяющей два куска металла»

**Цель работы:** Провести расчет и визуализацию распределения разности температур вдоль стержня, соединяющей два куска металла.

Условия задачи. Два куска металла, теплоемкости которых  $c_1=0.39$  Дж/кг (медь) и  $c_2=0.90$  Дж/кг (алюминий) соединены стержнем длины  $l=10$  см с площадью поперечного сечения  $s=2$  мм<sup>2</sup> и достаточно малой теплопроводностью  $\kappa=0.143$  Вт/(м\*К). Вся система теплоизолирована от окружающего пространства. В момент  $t=0$  разность температур между кусками металла равна  $\Delta T_0=60$  К. Пренебрегая теплоемкостью стержня, найти разность температур между металлами как функцию времени.

Разность температур между металлами как функцию времени находим по формуле

$$\Delta T = \Delta T_0 \exp(-\alpha t), \text{ где } \alpha = \frac{(c_1+c_2) s \kappa}{c_1 c_2 l}$$

Программа расчета и визуализации

```
>> c1=0.39; c2=0.90; x=0.143; % ввод параметров
>> deltaT=60; % ввод параметров
>> deltaT0=60; % ввод параметров
>> s=2; l=10; % ввод параметров
>> t=0:0.1:40; % ввод вектора расстояния
>> alfa=(c1+c2).*s.*x./(c1.*c2.*l); % вычисление постоянной
>> deltaT=deltaT0.*exp(-alfa.*t); % вычисление разности температур между металлами как %
функцию времени
>> plot(t,deltaT,'k-') % визуализация
>> grid on % нанесение координатной сетки
>> xlabel('t, s') % нанесение названия оси
>> ylabel('deltaT') % нанесение названия оси
>> title('deltaT=F(t)') % нанесение названия оси
Результат расчета представлен на рис. 5.
```

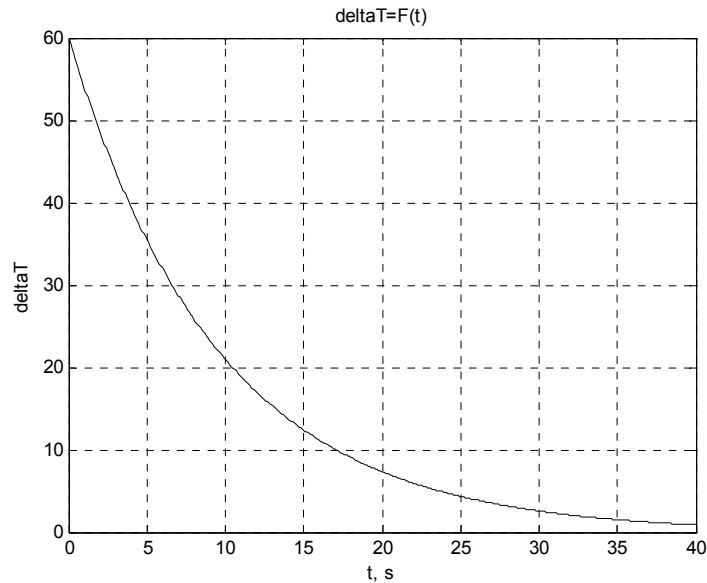


Рисунок 5 - Зависимость разности температур между кусками металла от времени

**Лабораторная работа №6:** Постоянный электрический ток течет по однородному проводу, радиус сечения которого  $R=1\text{см}$  и коэффициент теплопроводности  $\kappa=0.143\text{ Вт/(м*К)}$ . В единице объема провода выделяется тепловая мощность с объемной плотностью  $w=2\text{ Вт/м}^3$ . Найти распределение температуры в проводе, если установившаяся температура равна на его поверхности  $T_P=300\text{К}$ .

Температура внутри провода вдоль  $r$  распределяется в соответствии с формулой

$$T = T_P + (R^2 - r^2) * w / 4\kappa$$

Программа расчета и визуализации

```
>> x=0.143; w=2; R=1; TP=300; % ввод параметров
>> r=0:0.1:1; % ввод вектора расстояния
>> T=TP+(R.^2-r.^2).*w./(4*x); % вычисление распределения температуры
>> plot(r,T,'r') % визуализация
>> grid on % нанесение координатной сетки
>> xlabel('r') % нанесение названия оси
>> ylabel('T') % нанесение названия оси
>> title('T=F(r)') % нанесение названия графика
```

Результат расчета представлен на рис.6.

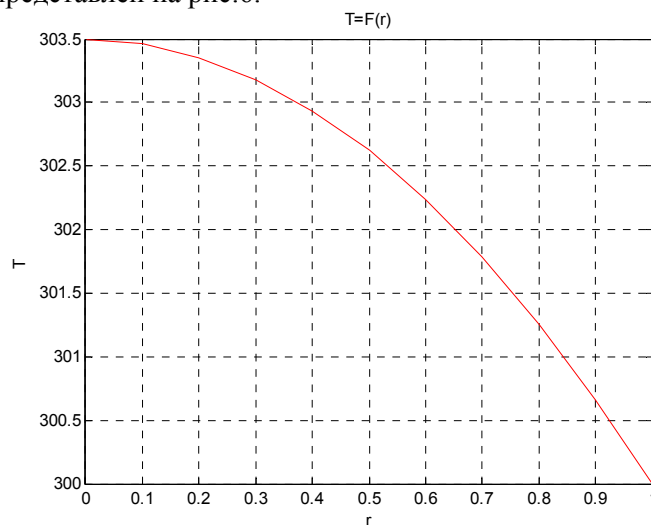


Рисунок 6 - Распределение температуры в проводе вдоль  $r$

Программа расчета и визуализации линий равных температур

```
>> x=-0.5:0.01:0.5; % ввод вектора координаты
>> y=-0.5:0.01:0.5; % ввод вектора координаты
>> w=2; TP=300; % ввод параметров
>> r=sqrt(x.^2+y.^2); % вычисление расстояния
>> [X,Y]=meshgrid(x,y); % ввод массивов координат
>> r2 = ((X + 0.2).^ 2 + Y.^ 2).^0.5; % вычисление расстояния
>> r1 = ((X - 0.2).^ 2 + Y.^ 2).^0.5; % вычисление расстояния
>> r=sqrt(r1.^2+r2.^2); % вычисление расстояния
>> k=0.143; % ввод коэффициента теплопроводности
>> R=1; % ввод радиуса сечения провода
>> T=TP+(R.^2-r.^2).*w./(4*k); % вычисление распределения температуры
>> Z=T; % перприсвоение
>> contour3(X,Y,Z,100); % изображение изолиний равных температур
>> xlabel('x,m') % нанесение названия оси
>> ylabel('y, m') % нанесение названия оси
>> zlabel('T, K') % нанесение названия оси
```

Результат представлен на рис. 7.

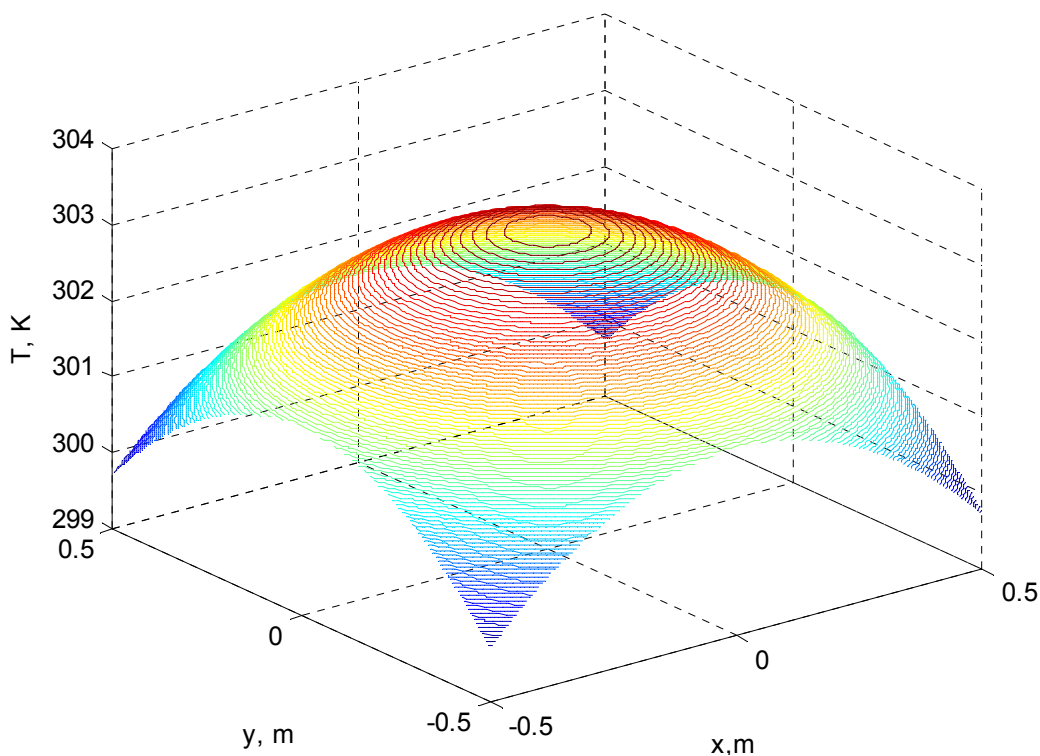


Рисунок 7 - Линии равных температур в трехмерном пространстве  
 >> view([0 0 100]) % проекция на опорную плоскость x,y.

Результат представлен на рис. 8.

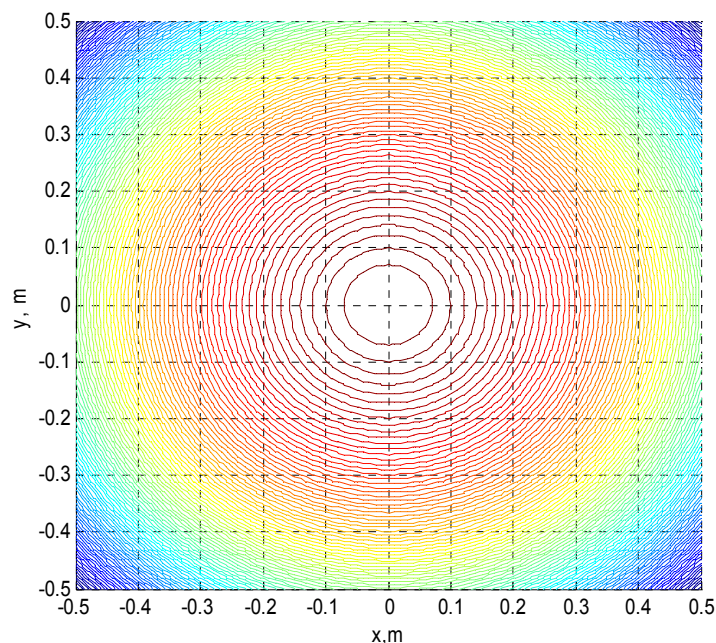


Рисунок 8 - Линии равных температур

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] CD диск компании ОАО «Физикон». «Открытая физика 1.1».2001.
- [2] <http://elektronika.newmail.ru>
- [3] Кабылбеков К.А., Саидахметов П.А., Арысбаева А.С. Модель бланка организации самостоятельного выполнения учениками компьютерных лабораторных работ. Известия НАН РК, серия физ.мат., Алматы, 2013, №6, С 82-89.
- [4] Кабылбеков К.А., Саидахметов П.А., Байдуллаева Л.Е., Абдураимов Р. Методика применения закономерностей фото- и комптонэффекта, модели бланков оргнизации выполнения компьютерной лабораторной работы. Известия НАН РК, серия физ.мат., Алматы, 2013. №6, С 114-121.
- [5] Кабылбеков К.А., Саидахметов П.А., Турганова Т.К., Нуруллаев М.А., Байдуллаева Л.Е. Модель урока на тему собирающей и рассеивающей линзы. Известия НАН РК, серия физ.-мат.№2, Алматы, 2014, С 286—294.
- [6] Кабылбеков К.А., Аширбаев Х. А., Саидахметов П.А., Рустемова Қ. Ж., Байдуллаева Л. Е. Модель бланка организации выполнения компьютерной лабораторной работы по исследованию дифракции света. Изв. НАН РК, серия физ.-мат, №1(299), Алматы, 2015, С 71-77.
- [7] Кабылбеков К.А., Аширбаев Х. А., Такибаева Г.А., Сапарбаева Э.М., Байдуллаева Л. Е., Адинева Ш.И. Модель бланка организации компьютерной лабораторной работы по исследованию движения заряженных частиц в магнитном поле и работы масс-спектрометра. Изв. НАН РК, серия физ.-мат, №1(299), Алматы, 2015, С 80-87.
- [8] Кабылбеков К.А., Аширбаев Х. А., Саидахметов, П А., Байгулова З.А., Байдуллаева Л.Е. Модель бланка организации компьютерной лабораторной работы по исследованию колец Ньютона. Изв. НАН РК, серия физ.-мат, № 1(299), Алматы, 2015, С14-20.
- [9] Кабылбеков К.А., Аширбаев Х.А., Сабалахова А.П., Джумагалиева А.И. Модель бланка оргнизации выполнения компьютерной лабораторной работы по исследованию интерференции света. Изв. НАН РК, серия физ.мат., № 3 (301), Алматы, 2015, С 131-136.
- [10] Кабылбеков К.А., Аширбаев Х.А., Сабалахова А.П., Джумагалиева А.И. Модель бланка оргнизации выполнения компьютерной лабораторной работы по исследованию эффекта Доплера. Изв. НАН РК, серия физ.-мат., № 3 (301) Алматы, 2015, С 155-160.
- [11] Кабылбеков К.А., Аширбаев Х.А., Арысбаева А.С., Джумагалиева А.М. Модель бланка организации компьютерной лабораторной работы при исследовании физических явлений. Современные наукоемкие технологии, №4, Москва, 2015, С 40-43.
- [12] Кабылбеков К.А., Саидахметов П. А., Аширбаев Х.А., Омашова Г.Ш., Бердалиева Ж. Модель бланка организации компьютерной лабораторной работы по исследованию электромагнитных колебаний. Изв. НАН РК, серия физ.мат. Алматы, №1(305), 2016, С 111-116.
- [13] Кабылбеков К.А., Саидахметов П. А., Омашова Г.Ш., Бердалиева Ж., Джумагалиева А.И. Модель бланка организации компьютерной лабораторной работы по исследованию взаимодействия двух бесконечно длинных параллельных проводников с токами. Изв. НАН РК, серия физ.мат. Алматы, №1(305), 2016, С 135-140.
- [14] Кабылбеков К.А., Саидахметов П.А., Омашова Г.Ш., Суттибаева Д.И., Қозыбакова Г.Н. Модель бланка организации компьютерной лабораторной работы по исследованию изобарного процесса. Изв НАН РК серия физ. мат. Алматы, №2 2016г. С 92-97.
- [15] Кабылбеков К.А., Саидахметов П.А., Омашова Г.Ш., Абекова Ж.А., Нуруллаев М.А. Модель бланка организации выполнения исследовательских заданий по физике. Вестник НАН РК Алматы, №3, 2016, С 67-73.



- [16] Кабылбеков К.А., Саидахметов П.А., Аширбаев, Х.А., Абдубаева Ф.И., Досканова А.Е. Исследование работы газа на компьютерной модели Вестник НАН РК, Алматы, №2 2016. С83-88
- [17] Кабылбеков К.А., Саидахметов П. А., Омашова Г.Ш., Серикбаева Г.С., Суйркулова Ж.Н. Модель бланка организации компьютерной лабораторной работы по исследованию свободных механических колебаний. Изв. НАН РК, серия физ. мат. Алматы, №2 2016г. С84-91.
- [18] Кабылбеков К.А. Мадияров Н.К., Саидахметов П.А. Самостоятельное конструирование исследовательских заданий компьютерных лабораторных работ по термодинамике. Труды IX Международной научн-методической конференции. Преподавание естественных наук (биологии, физики, химии) математики и информатики. Томск-2016, С 93-99.
- [19] Кабылбеков К.А., Саидахметов П.А., Омашова Г.Ш. Организация компьютерной лабораторной работы по исследованию реактивного сопротивления катушки индуктивности в цепи переменного тока. Вестник НАН РК-2017. Алматы, №1, С 77-82.
- [20] Кабылбеков К.А., Саидахметов П. А., Омашова Г.Ш., Аширбаев Х.А., Абекова Ж.А. Организация компьютерной лабораторной работы по исследованию изотерм реального газа. Изв. НАН РК серия физ. мат. Алматы, №1, 2017, С 77-83.
- [21] Кабылбеков К.А., Саидахметов П. А., Омашова Г.Ш., Организация выполнения компьютерной лабораторной работы по исследованию явления биения. Изв. НАН РК серия физ. мат., №2, Алматы, 2017, С104-110.
- [22] Кабылбеков К.А., Омашова Г.Ш., Спабекова Р.С., Саидахметов П.А., Серикбаева Г., Арысбаева А.С. Модель бланка организации компьютерной лабораторной работы по исследованию изотермического процесса. Вестник НАН РК, №3, Алматы 2017, С119-207.
- [23] Кабылбеков К.А., Омашова Г.Ш., Спабекова Р.С., Саидахметов П.А., Абдрахманова Х.К., Арысбаева А.С. Самостоятельное конструирование заданий для выполнения компьютерной лабораторной работы по исследованию ихохорного процесса. Известия НАН РК, сер. физ. мат., №3, Алматы, 2017, С127-134.
- [24] Кабылбеков К.А., Омашова Г.Ш., Спабекова Р.С., Саидахметов П.А., Серикбаева Г.С., Актуреева Г. Организация компьютерных лабораторных работ по исследованию тока включения и выключения источника тока с использованием пакета программ MATLAB. Известия НАН РК, сер. физ. мат., №3(313), Алматы, 2017, С139-146.
- [25] Кабылбеков К.А., Омашова Г.Ш., Спабекова Р.С., Саидахметов П.А., Серикбаева Г.С., Актуреева Г. Организация компьютерных лабораторных работ по исследованию распределения молекул по скоростям и по высоте с поверхности Земли с использованием пакета программ MATLAB. Вестник НАН РК, №3 (313), Алматы, 2017, С111-119.
- [26] Кабылбеков К.А., Аширбаев Х.А., Абдрахманова Х.К., Джумагалиева А.И. Кыдырбекова Ж.Б. Организация выполнения лабораторной работы по исследованию электрического и магнитного полей с использованием пакета программ MATLAB. Известия НАН РК, сер. физ. мат., №3 (313), Алматы, 2017, С206-212.
- [27] Дьяконов В.П. MATLAB учебный курс. - СПб.: Питер, 2001. - 533с.

## REFERENCES

- [1] CD a disk of the company of Open Society "Physical icons". «The open physics 1.1» 2001.
- [2] <http://elektronika.newmail.ru>
- [3] Kabylybekov K.A., Saidahmetov P. A, Arysbaeva A.S. Model of the form of the organisation of self-maintained performance of computer laboratory operation. News NAN RK, series physical-mat., Almaty, 2013, №6, P82-89.
- [4] Kabylybekov K.A., Saidahmetov P. A, Bajdullaeva L.E. Abduraimov. A procedure of use of computer models for photoeffect studying, Compton effect, models of forms of the organisation of performance of computer laboratory operations. News NAN RK, series physical-mat., Almaty, 2013. №6, P114-121.
- [5] Kabylybekov K.A., Saidahmetov P. A. Turganova T.K, Nurullaev M. A, Bajdullaeva L.E. Model of carrying out of a lesson of modelling of agglomerating and diffusing lenses. News NAN RK, series physical-mat., Almaty, № 2, 2014, P286-294.
- [6] Kabylybekov K.A., Ashirbaev H. A, Saidahmetov P. A, Rustemova T.Ж, Bajdullaeva L. E. Model of the form of the organisation of performance of computer laboratory operation on examination of a diffraction of light. News of NAN RK, series physical-mat., Almaty, № 1(299), 2015, P71-77.
- [7] Kabylybekov K.A., Ashirbaev H. A, Takibaeva G.A, Saparbaeva E. M, Bajdullaeva L. E, Adineeva S.H.I. Model of the form of the organisation of computer laboratory operation on examination of a motion of charged particles in a magnetic field. News of NAN RK, series physical-mat., Almaty, № 1 (299), 2015, P80-87.
- [8] Kabylybekov K.A., Ashirbaev H. A, Saidahmetov, P A, Bajgulova Z.A., Bajdullaeva L.E. Model of the form of the organisations of computer laboratory operation on examination of Newton's fringes. News NAN RK, series physical-mat/, Almaty, №1 (299), 2015, P14-20.
- [9] Kabylybekov K.A., Ashirbaev H.A., Sabalahova A.P., Dzhumagalieva A.I. Model of the form of the organisation of computer laboratory operation on examination of the phenomenon of an interference of light. News of NAN RK, series physical-mat., № 3 (301), Almaty, 2015, P131-136
- [10] Kabylybekov K.A., Ashirbaev H.A., Sabalahova A.P., Dzhumagalieva A.I. Model of the form of the organisation of computer laboratory operations on examination of Doppler-effect. News NAN RK, series physical-mat., № 3 (301) Almaty, 2015, P155-160.
- [11] Kabylybekov K.A., Ashirbaev H.A., Arysbaeva A.S., Dzhumagalieva A.I. Models of the form of the organisation of computer laboratory operations at examination of the physical phenomena. Modern high technologies. №4, Moscow, 2015. P. 40-43.
- [12] Kabylybekov K. A., Saidahmetov P. A., H. A. Ashirbaev, Omarova G. Sh., Berdalieva J. Model Blanca organization of computer laboratory works on research of electromagnetic oscillations. News NAN RK, series physical-mat., №1(305), Almaty, 2016, P111-116.

[13] Kabyzbekov K. A., Saidahmetov P. A., Omarova G. Sh., Berdalieva J., Dzhumagalieva A. I. Model Blanca computer organization laboratory study of the interaction between two infinitely long parallel conductors with currents. News NAN RK, series physical-mat., №1(305), Almaty, 2016, P 135-140.

[14] Kabyzbekov K.A., Saidahmetov P A, Omashova G.SH, Suttibaeva D.I., Kozybakova G. N. Model of the form of the organization of computer laboratory operation of isobaric process. News NAN RK, series physical-mat., Almaty, № 2, 2016, P. 92-97.

[15] Kabyzbekov K.A., Omashova G.SH., Saidahmetov P.A., Nurullaev M. A., Artygalin N.A. Models of the form of the organization of computer laboratory operation on examination of the Carnot cycle. News NAN RK, series physical-mat., Almaty, № 2, 2016, P 98-103.

[16] Kabyzbekov K.A., Saidahmetov P A, Ashirbaev . H A, Abdubaeva Ph.I, Doskanova A.E. Examination of operation gaz on computer model. The bulletin of NAN PK №2 2016. P 83-88.

[17] Kabyzbekov K.A., Saidahmetov P A, Omashova G.Sh., Serikbaeva G.S., Sujerkulova Zh. N. News NAN RK, series physical-mat., № 2, 2016, P 84-91.

[18] Kabyzbekov K. A. Madjarov N. T., Saidahmetov P. A. An Independent design research assignments, computer laboratory work on thermodynamics. Proceedings of the IX International scientific-methodical conference. Teaching natural Sciences (biology, physics, chemistry) mathematics and computer science. Tomsk-2016, P 93-99.

[19] Kabyzbekov K. A., Saidahmetov P. A., Omashova G.Sh Organization computer laboratory work on the study of reactance inductor in an ac circuit. The bulletin of NAN RK №1, Almaty, 2017. P 77-82.

[20] Kabyzbekov K. A., Saidahmetov P. A., Omashova G.Sh., Ashirbaev H. A., Abekova J. A. Organization of computer laboratory works on the study of the isotherms of a real gas. News NAN RK, series physical-mat., Almaty, №1, 2017, P 77-83.

[21] Organization of computer laboratory works on the study of the phenomenon of beats. News NAN RK, series physical-mat., №2, Almaty, 2017, C104-110.

[22] Kabyzbekov KA, Omashova G. Sh., Spabekova R.S, Saidahmetov P.A, Serikbaeva G. Arysbaeva A.S. Blank computer model of the organization of the laboratory work on the study of the isothermal process. Herald of the National Academy of Sciences of Kazakhstan, №3, Almaty 2017, P119-207.

[23] Kabyzbekov K.A, Omashova G.Sh., Spabekova R.S, Saidahmetov P.A., Abdrakhmanova H.K, Arysbaeva A.S. Self konstruovanie tasks for executing a computer lab to study ihohornogo process. News NAN RK, series physical-mat., №3, Almaty, 2017, P 127-134.

[24] Kabyzbekov K.A, Omashova G. Sh, Spabekova R.S, Saidahmetov P.A, Serikbaeva G.S, Aktureeva G. Organization of computer laboratory studies of inrush current on and off the power supply to ispolzvaniam MATLAB software package. News NAN RK, series physical-mat., Almaty, №3, 2017, P139-146.

[25] Kabyzbekov K.A, Omashova G. Sh, Spabekova R.S, Saidahmetov P.A, Serikbaeva G.S, Aktureeva G. Organization of computer labs for the study of the molecular distribution of the velocity and the height of the Earth's surface with ispolzvaniam MATLAB software package. Bulletin RK NAS, №3, Almaaty, 2017, P 111-119.

[26] Kabyzbekov K.A, Ashirbayev H.A, Abdrakhmanova H.K, Dzhumagalieva A.I., Kydyrbekova J.B. Organization of laboratory work on the study of electric and magnetic fields using MATLAB software package. studies of inrush current on and off the power supply to ispolzvaniam MATLAB software package. News NAN RK, series physical-mat., Almaty, №3, (313), Almaty, 2017, P 206-212.

[27] Dyakonov V.P. MATLAB training course. - Spb.: Peter, 2001. – 533p.

### К.А.Қабылбеков, Г.Ш. Омашова

М.Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік университеті, Шымкент, Қазақстан

### МАТЛАВ ЖҮЙЕСІН ҚОЛДАНЫП ЖЫЛУ ТАСЫМАЛДАУДЫ ЗЕРТТЕУГЕ АРНАЛҒАН ЗЕРТХАНАЛЫҚ ЖҰМЫСТАРДЫ ОРЫНДАУДЫ ҰЙЫМДАСТЫРУ

**Аннотация.** MATLAB жүйесін қолданып компьютерлік зертханалық жұмыстарды орындауды ұйымдас-тырудың үлгілері ұсынылған: 1) Екі параллель орналасқан пластиналар арасындағы зат бойында температу-раның таралуын есептеу және бейнелеу. Температураның таралу графигін тұрғызу; 2) Екі коаксиал орналасқан цилиндрлер арасындағы зат бойында температураның таралуын есептеу және бейнелеу. Температураның таралу графигін тұрғызу; 3) Екі коаксиал орналасқан сфералар арасындағы зат бойында температураның таралуын есептеу және бейнелеу. Температураның таралу графигін тұрғызу; 4) Біртекті шар бетінде температура орныққан жағдайдағы температураның шар радиусы бойында таралуын есептеу және бейнелеу. Температураның таралу графигін тұрғызу; 5) Әр түрлі температурадағы екі металл үлгісін жал-ғастырған стержень бойында температураның таралуын есептеу және бейнелеу. Температура айырмасының стержень бойында таралу графигін тұрғызу. Есептеу мен бейнелеу нәтижелері график түрінде келтірілген.

**Тірек сөздер.** Температураның таралуы, зат, жылу тасымалдау, пластина, цилиндр, шар.

## NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN  
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 6, Number 316 (2017), 67 – 77

A.N. Issadykov<sup>1,2</sup>, M.A. Ivanov<sup>1</sup>, G.S. Nurbakova<sup>2,3</sup>,  
G.G. Saidullaeva<sup>2,3</sup>, S.B. Rustembayeva<sup>2,3</sup>

<sup>1</sup>Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, Russian Federation;

<sup>2</sup>Scientific Research Institutes of Experimental and theoretical physics, Almaty, Republic of Kazakhstan;

<sup>3</sup>Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Republic of Kazakhstan)

[issadykov.a@gmail.com](mailto:issadykov.a@gmail.com), [g.nurbakova@gmail.com](mailto:g.nurbakova@gmail.com)

## CALCULATION OF B–S TRANSITION FORM FACTORS

**Abstract.** In this paper we perform the straightforward calculation of the  $B(B_s) \rightarrow S$  ( $S$  is a scalar meson) transition form factors in the full kinematical region within the covariant quark model. The diagram of the matrix element of  $B \rightarrow S$  transition was shown. Calculation of form factors was carried out for different values of the parameter  $\Lambda_S$ . We varied this parameter in the interval  $\Lambda_S \in [0.8, 1.5]$  GeV. Form factors are more sensitive to the choice of the parameter  $\Lambda_S$  at small values of the transferred momentum and less sensitive near the zero recoil. The numerical values of the obtained form factors are compared with the results of other theoretical approaches. We restrict ourselves to the scalar mesons below 1 GeV:  $f_0(500)$ ,  $f_0(980)$ ,  $a_0(980)$  и  $K_0^*(800)$  on the assumption that they are simple quark-antiquark states.

**Keywords:** Form factors, scalar meson, covariant quark model.

УДК 539.126.4

А.Н. Исадыков<sup>1,2</sup>, М.А. Иванов<sup>1</sup>, Г.С. Нурбакова<sup>2,3</sup>,  
Г.Г. Сайдуллаева<sup>2,3</sup>, С.Б. Рустембаева<sup>2,3</sup>

<sup>1</sup>Объединенный Институт Ядерных Исследований, г. Дубна, Российская Федерация;

<sup>2</sup>Научно-исследовательский институт экспериментальной и теоретической физики,  
г. Алматы, Республика Казахстан;

<sup>3</sup>Казахский Национальный Университет им. аль-Фараби, г. Алматы, Республика Казахстан)

## ВЫЧИСЛЕНИЕ ФОРМФАКТОРОВ В–S ПЕРЕХОДА

**Аннотация.** В данной работе в рамках ковариантной модели кварков вычислены формфакторы переходов  $B(B_s) \rightarrow S$ , где  $S$  есть скалярный мезон. Показана диаграмма матричного элемента  $B \rightarrow S$  перехода. Поведение формфакторов получено во всей кинематической области квадрата переданного импульса. Вычисление формфакторов проводилось для разных значений параметра  $\Lambda_S$ . Мы варьировали этот параметр в интервале  $\Lambda_S \in [0.8, 1.5]$  ГэВ. Формфакторы более чувствительны к выбору параметра  $\Lambda_S$  при малых значениях переданного импульса и менее чувствительны вблизи нулевой отдачи. Численные значения полученных формфакторов сравниваем с результатами других работ. Вычисления проведены для нонета скалярных мезонов с массами меньше 1 ГэВ ( $f_0(500)$ ,  $f_0(980)$ ,  $a_0(980)$  и  $K_0^*(800)$ ) в предположении, что они являются простейшими кварк-антикварковыми состояниями.

**Ключевые слова:** Формфакторы, скалярный мезон, ковариантная модель кварков.

### Введение

В последнее время большое внимание было уделено изучению редкого распада В-мезона  $B \rightarrow K^*(\rightarrow K\pi)\mu^+\mu^-$ , происходящего за счет нейтральных токов с изменением флэйвора. Одной

из основных причин, вызвавших столь широкий интерес к данному распаду, явились экспериментальные данные по измерению угловых распределений, выполненные коллаборацией ЛНСб [1,2]. Оказалось, что имеется расхождение между измеренным значением для одной из наблюдаемых и соответствующим предсказанием СМ на уровне 3.7 стандартных отклонений. Много усилий было потрачено на возможное объяснение этого отклонения с помощью привлечения эффектов новой физики (НФ) [3-8].

Хорошо известно, что при описании эксклюзивных распадов тяжелых адронов, в частности таких, как редкие распады В-мезона, возможно отделить вклады малых расстояний (высоких энергий) от вкладов больших расстояний (низких энергий). Вклады малых расстояний вычисляются по теории возмущений Стандартной Модели, и поэтому погрешность вычислений находится под контролем. Оценка вкладов больших расстояний требует выхода за рамки теории возмущений или, другими словами, привлечения непертурбативных методов. Как следствие, возникает большая неопределенность при оценке теоретической погрешности при вычислении данных вкладов. Задача состоит в вычислении матричных элементов соответствующих кварковых токов в обкладках начального состояния и продуктов его распада в конечном состоянии.

Обычно матричные элементы полулептонных и редких распадов тяжелых адронов параметризуются с помощью скалярных функций, называемых формфакторами, которые зависят от квадрата переданного импульса лептонной паре. Вычисление формфакторов перехода  $B \rightarrow K^*$  было выполнено во многих теоретических подходах и моделях. Перечислим некоторые из них: правила сумм КХД на световом конусе [9], стандартные правила сумм КХД [10], дисперсионная кварковая модель [11], простая параметризация формфакторов с помощью дипольного приближения [12], пертурбативная КХД в области больших отдал [13], релятивистская модель кварков [14], уравнения Дайсона-Швингера в КХД [15].

Формфакторы переходов  $B_S$  и  $D_S$  мезонов в скалярный мезон с большой массой  $K_0^*(1430)$  были вычислены в рамках подхода, основанного на правилах сумм КХД [16], в рамках кварковой модели на световом конусе [17] и в рамках правил сумм КХД для трехточечных функций [18]. Формфакторы переходов В-мезона в скалярные мезоны были исследованы в рамках правил сумм КХД на световом конусе в работе [19] и в пертурбативной КХД в работе [20]. Используя эти формфакторы, были рассчитаны ширины распадов и брэнчинги полулептонных  $B \rightarrow Sl\bar{\nu}$  и редких  $B \rightarrow Sl^+l^-$  распадов.

Формфакторы перехода  $B_S \rightarrow f_0(980)$  были вычислены в работе [21] с помощью правил сумм КХД на световом конусе в лидирующем порядке по сильной константе связи, а также была проведена оценка поправок, возникающих в следующем за лидирующим порядке. Правила сумм КХД на световом конусе были также использованы в работе [22] для вычисления формфакторов  $B_S \rightarrow S$  переходов и затем для расчетов брэнчингов распадов  $B \rightarrow Sl\bar{\nu}_l, \bar{l}l$  ( $l = e, \mu, \tau$ ). Амплитуды распределения на световом конусе твиста 3 для скалярных мезонов были исследованы в работе [23] с помощью правил сумм КХД. Данные амплитуды были использованы при вычислении формфакторов  $B \rightarrow S$  переходов с помощью введения соответствующих киральных токов в коррелятор. Формфакторы  $B \rightarrow S$  переходов для двух нонетов скалярных мезонов, лежащих соответственно ниже и выше 1 ГэВ, были вычислены в работе [24] с учетом пертурбативных  $O(\alpha_s)$ -поправок для амплитуд твиста 2 в рамках правил сумм КХД на световом конусе.

### Легкие скалярные мезоны

SU(3) нонет скалярных мезонов ниже 1 ГэВ можно записать в следующей матричной форме:

$$\hat{S} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{i=0}^8 S^i \lambda^i, \quad (1)$$

где  $\lambda^0 = \sqrt{\frac{2}{3}} I$ .

Физические скалярные поля связаны с декартовым базисом следующим образом:

$$S^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (S^1 \mp iS^2), \quad S^0 = S^3,$$

$$\begin{aligned}
S_S^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(S^4 - iS^5), S_S^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(S^6 - iS^7), \\
S_S^- &= \frac{1}{\sqrt{2}}(S^4 + iS^5), \bar{S}_S^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(S^6 + iS^7), \\
S' &= S^0 \cos \theta_S + S^8 \sin \theta_S, S = -S^0 \sin \theta_S + S^8 \cos \theta_S,
\end{aligned} \tag{2}$$

где  $\theta_S$  – угол октет-синглетного смешивания.

Кварковый ток, описывающий скалярные мезоны, записывается в виде:

$$\begin{aligned}
\Box_{S\bar{q}q} &= \bar{q}\hat{S}q \\
&= S^+\bar{u}d + S^-\bar{d}u + S^0\frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{u}u - \bar{d}d) + S_S^+\bar{u}s + S_S^0\bar{d}s + S_S^-\bar{s}u + \bar{S}_S^0\bar{s}d \\
&\quad + S'\left(\cos\delta_S\frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{u}u + \bar{d}d) - \sin\delta_S\bar{s}s\right) \\
&\quad - S\left(\sin\delta_S\frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{u}u + \bar{d}d) + \cos\delta_S\bar{s}s\right),
\end{aligned} \tag{3}$$

где  $\delta_S = \theta - \theta_I$  и угол идеального смешивания  $\theta_I = \arctan(1/\sqrt{2})$ .

Далее используются следующие обозначения для скалярных мезонов ниже 1 ГэВ из PDG [25]:

$$\begin{aligned}
S_S &\equiv K_0^*(800), I(J^P) = \frac{1}{2}(0^+), m_{K_0^*(800)} = 682 \pm 29 \text{ МэВ}; \\
S &\equiv f_0(980), I^G(J^{PC}) = 0^+(0^{++}), m_{f_0(980)} = 990 \pm 20 \text{ МэВ}; \\
S' &\equiv f_0(500), I^G(J^{PC}) = 0^+(0^{++}), m_{f_0(500)} = 400 \div 550 \text{ МэВ}; \\
S^{\pm,0} &\equiv a_0(980), I^G(J^{PC}) = 1^-(0^{++}), m_{a_0(980)} = 980 \pm 20 \text{ МэВ}.
\end{aligned} \tag{4}$$

Кроме того, предполагается, что  $\delta_S = 0$ , чтобы обеспечить чистое  $\bar{s}s$  состояние для  $f_0(980)$  мезона.

$K_0^*(800)$  мезон имеет моды распада  $K_0^*(800) \rightarrow K\pi$ . Полная ширина распада мезона  $\Gamma = 547 \pm 24$  МэВ [26, 27];

$f_0(980)$  мезон имеет моды распада  $f_0(980) \rightarrow \pi\pi$  и  $f_0(980) \rightarrow K\bar{K}$ . Полная ширина распада мезона  $\Gamma = 40 \div 100$  МэВ [26];

$f_0(500)$  мезон распадается на  $f_0(500) \rightarrow \pi\pi, \gamma\gamma$ . Полная ширина распада мезона  $\Gamma = 400 \div 700$  МэВ [27];

$a_0(980)$  мезон (старое название  $\delta$  мезон) легкий не имеющий «аромата» ( $S = C = B = 0$ ) [28]. Квантовые числа мезона  $I^G(J^{PC}) = 1^-(0^{++})$ . Мезон состоит из смешанного состояния  $u, d$  и  $s$  кварков.

Масса мезона  $m_{a_0(980)} = 980 \pm 20$  МэВ. Имеет моды распада  $a_0(980) \rightarrow \eta\pi$  и  $a_0(980) \rightarrow K\bar{K}$ . Полная ширина распада  $\Gamma = 50 \div 100$  МэВ. В данной работе использовались данные из PDG [25].

### Формфакторы $B \rightarrow S$ перехода в ковариантной модели кварков

Диаграмма матричного элемента  $B \rightarrow S$  перехода представлена на рисунке 1.

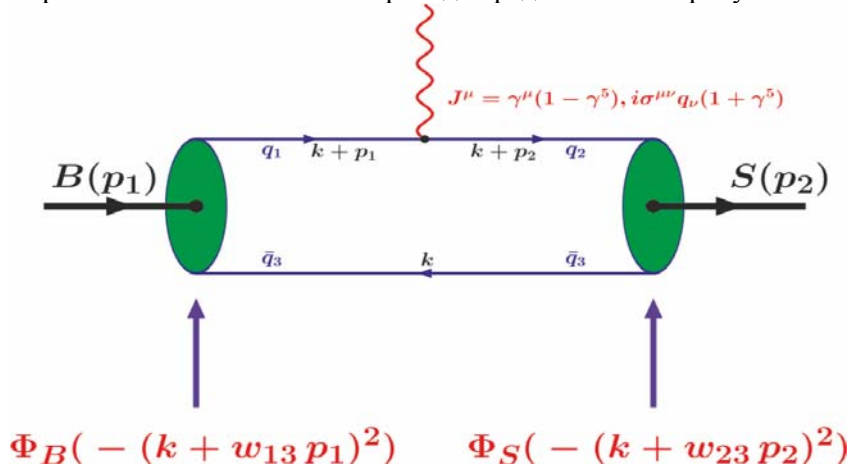


Рисунок 1 – Схематическое представление матричных элементов в уравнениях 5 и 6

Формфакторы определены как:

$$\begin{aligned} & \left\langle S_{[\bar{q}_3 q_2]}(p_2) \left| \bar{q}_2 O^\mu q_1 \right| B_{[\bar{q}_1 q_3]}(p_1) \right\rangle = \\ & = N_c g_B g_S \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4 i} \tilde{\Phi}_B \left( -(k + w_{13} p_1)^2 \right) \tilde{\Phi}_S \left( -(k + w_{23} p_2)^2 \right) \times \text{tr} \left[ S_2(k + p_2) O^\mu S_1(k + p_1) \gamma^5 S_3(k) \right] = (5) \\ & = F_+^{BS}(q^2) P^\mu + F_-^{BS}(q^2) q^\mu, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left\langle S_{[\bar{q}_3 q_2]}(p_2) \left| \bar{q}_2 (i\sigma^{\mu\nu} q_\nu (1 + \gamma^5)) q_1 \right| B_{[\bar{q}_1 q_3]}(p_1) \right\rangle = \\ & = N_c g_B g_S \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4 i} \tilde{\Phi}_B \left( -(k + w_{13} p_1)^2 \right) \tilde{\Phi}_S \left( -(k + w_{23} p_2)^2 \right) \times \\ & \times \text{tr} \left[ S_2(k + p_2) i\sigma^{\mu\nu} q_\nu (1 + \gamma^5) S_1(k + p_1) \gamma^5 S_3(k) \right] = (6) \\ & = -\frac{1}{m_1 + m_2} (q^2 P^\mu - q P q^\mu) F_T^{BS}(q^2). \end{aligned}$$

Здесь  $p_i^2 = m_i^2$ ,  $q_1 = b$ ,  $q_2 = u, s, d$ , и  $q_3 = s, d$ . Поскольку существуют три вида кварков, участвующих в этих процессах, введены обозначения с двумя индексами:  $w_{ij} = m_{q_j} / (m_{q_i} + m_{q_j})$   $m_{q_j}$   $m_{q_j}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ), так что  $w_{ij} + w_{ji} = 1$  [29].

#### Численные результаты $B \rightarrow S$ перехода

На рисунках 2 и 3 приведены результаты наших численных расчетов, которые хорошо аппроксимируются следующей дипольной параметризацией:

$$F(q^2) = \frac{F(0)}{1 - as + bs^2}, \quad s = \frac{q^2}{m_1^2}. \quad (7)$$

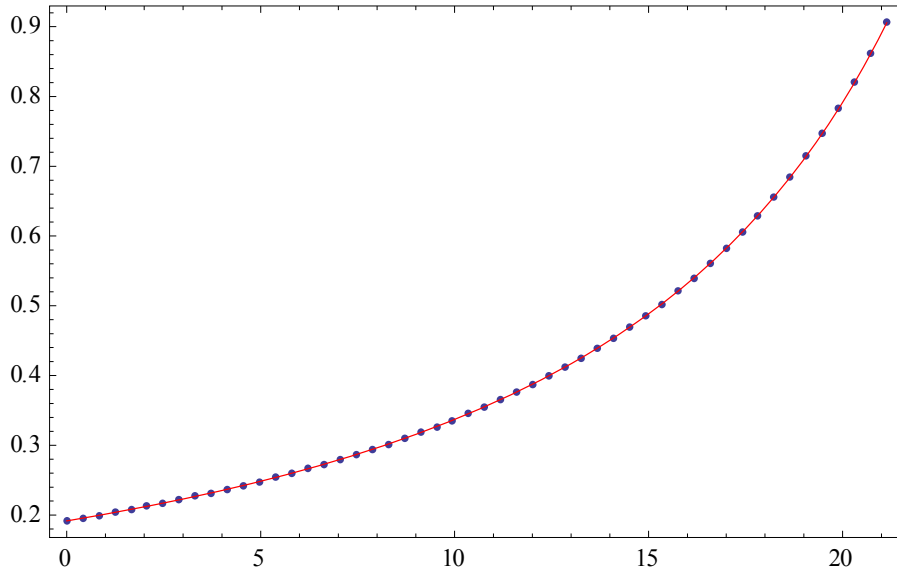


Рисунок 2 – Формфакторы, описывающие  $B \rightarrow S$  переход, в зависимости от переданного импульса  $q^2$ : точные численные результаты (синие пунктиры), аппроксимированные результаты (сплошная красная линия)

Значения  $F(0)$ ,  $a$  и  $b$  были вычислены для разных значений параметра  $\Lambda_S$ . Мы варьировали этот параметр в интервале  $\Lambda_S \in [0.8, 1.5]$ . Результаты численных расчетов приведены в таблице 1.

На рисунках 4–8 приведены формфакторы  $F_+(q^2)$ , а на рисунках 9–11 показано поведение формфакторов  $F_T(q^2)$   $B \rightarrow S$  переходов во всей кинематической области  $0 \leq q^2 \leq q^2_{max}$ . Поведение  $-F_-(q^2)$  очень похоже на  $F_+(q^2)$ , так что мы не приводим их графики. Можно видеть, что формфакторы более чувствительны к выбору  $\Lambda_S$  при малых  $q^2$  и менее чувствительны вблизи нулевой отдачи.

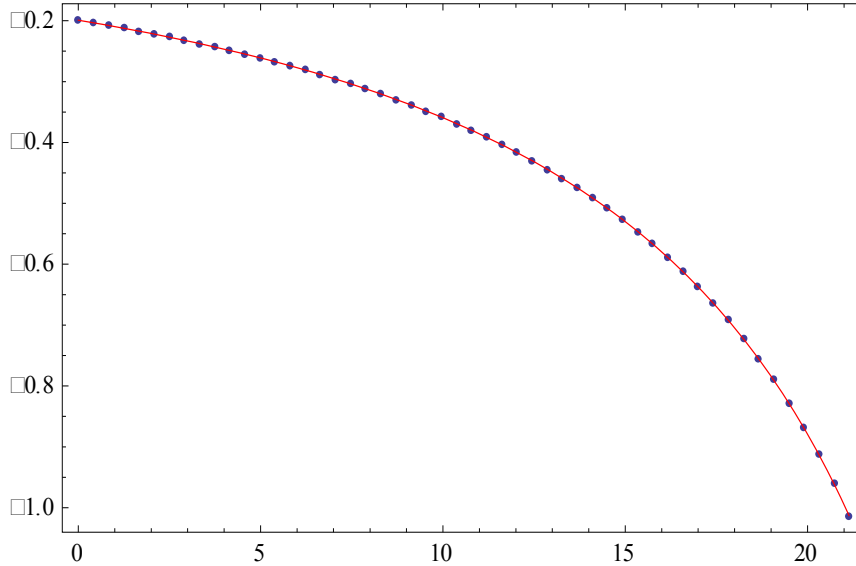


Рисунок 3 – Формфакторы, описывающие  $B \rightarrow S$  переход, в зависимости от переданного импульса  $q^2$ : точные численные результаты (синие пунктиры), аппроксимированные результаты (сплошная красная линия)

Таблица 1 – Параметры установленных переходных формфакторов  $F(q^2)$  при  $\Lambda_S = 0.8$  ГэВ и  $\Lambda_S = 1.5$  ГэВ

		$\Lambda_S = 0.8$			$\Lambda_S = 1.5$		
$q_1 = q_2$	$B - S$	$F_+(0)$	$a_+$	$b_+$	$F_+(0)$	$a_+$	$b_+$
$b \rightarrow u$	$B_d^0 - a_0^+(980)$	0.144	1.624	0.585	0.192	1.433	0.381
$b \rightarrow u$	$B_s^0 - K_0^{*0}(800)$	0.138	1.667	0.674	0.274	1.258	0.292
$b \rightarrow s$	$B_s^0 - f_0(980)$	0.141	1.663	0.651	0.254	1.269	0.262
$b \rightarrow s$	$B_d^0 - K_0^{*0}(800)$	0.191	1.348	0.407	0.306	0.988	0.108
$b \rightarrow d$	$B_d^0 - f_0(500)$	0.120	1.448	0.485	0.210	1.067	0.155
		$\Lambda_S = 0.8$			$\Lambda_S = 1.5$		
$q_1 = q_2$	$B - S$	$-F_-(0)$	$a_-$	$b_-$	$-F_-(0)$	$a_-$	$b_-$
$b \rightarrow u$	$B_d^0 - a_0^+(980)$	0.049	2.144	1.196	0.089	1.723	0.688
$b \rightarrow u$	$B_s^0 - K_0^{*0}(800)$	0.138	1.727	0.734	0.268	1.291	0.310
$b \rightarrow s$	$B_s^0 - f_0(980)$	0.140	1.761	0.755	0.253	1.320	0.295
$b \rightarrow s$	$B_d^0 - K_0^{*0}(800)$	0.199	1.406	0.457	0.296	1.032	0.129
$b \rightarrow d$	$B_d^0 - f_0(500)$	0.116	1.504	0.536	0.191	1.110	0.180
		$\Lambda_S = 0.8$			$\Lambda_S = 1.5$		
$q_1 = q_2$	$B - S$	$F_T(0)$	$a_T$	$b_T$	$F_T(0)$	$a_T$	$b_T$
$b - s$	$B_s^0 - f_0(980)$	0.165	1.680	0.667	0.285	1.276	0.257
$b - s$	$B_d^0 - K_0^{*0}(800)$	0.206	1.367	0.423	0.306	1.005	0.113
$b \rightarrow d$	$B_d^0 - f_0(500)$	0.124	1.460	0.496	0.203	1.080	0.159

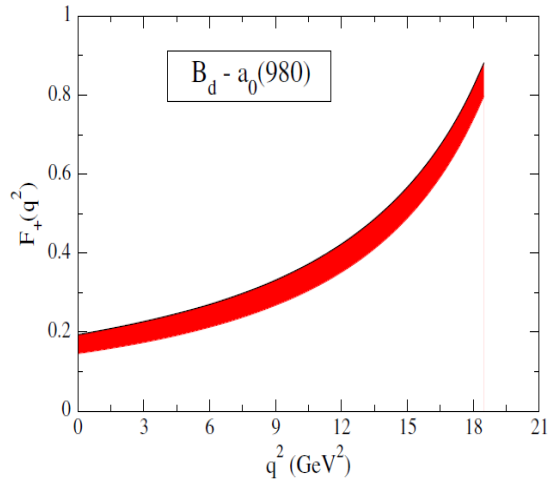


Рисунок 4 –  $F_+(q^2)$  формфакторы для перехода  $B_d^0 \rightarrow a_0^+(980)$ .

Верхние и нижние края соответствуют значениям  $\Lambda_S = 1.5$  ГэВ и  $\Lambda_S = 0.8$  ГэВ соответственно

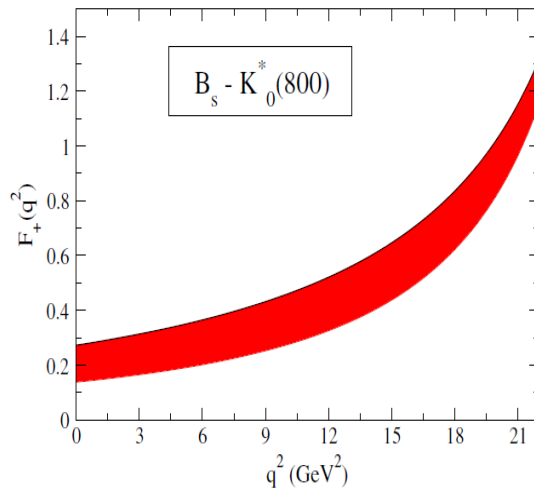


Рисунок 5 –  $F_+(q^2)$  формфакторы для перехода  $B_s^0 \rightarrow K_0^{*+}(800)$ .

Верхние и нижние края соответствуют значениям  $\Lambda_S = 1.5$  ГэВ и  $\Lambda_S = 0.8$  ГэВ соответственно

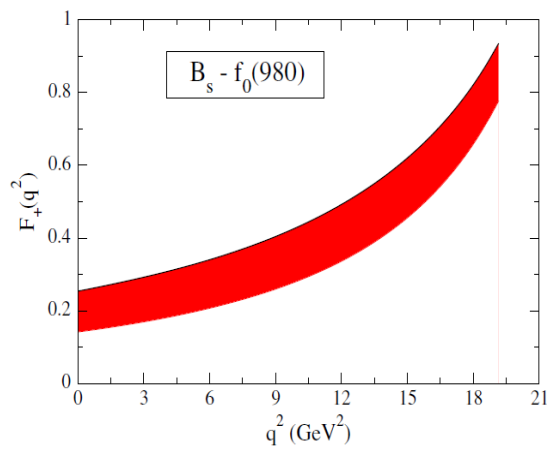


Рисунок 6 –  $F_+(q^2)$  формфакторы для перехода  $B_s^0 \rightarrow f_0(980)$ .

Верхние и нижние края соответствуют значениям  $\Lambda_S = 1.5$  ГэВ и  $\Lambda_S = 0.8$  ГэВ соответственно



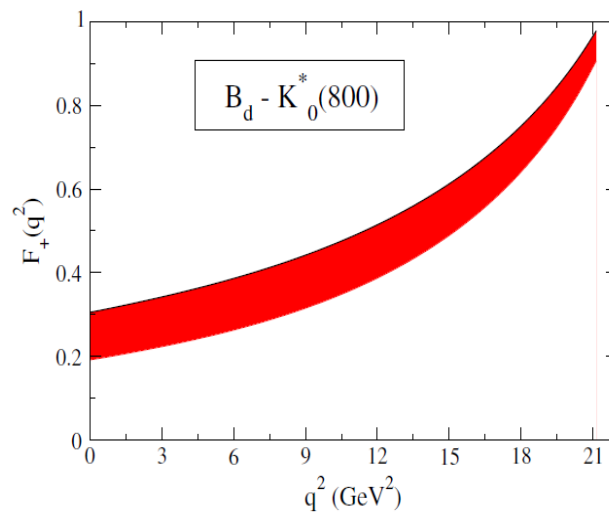


Рисунок 7 –  $F_+(q^2)$  формфакторы для перехода  $B_d^0 \rightarrow K_0^*(800)$ .

Верхние и нижние края соответствуют значениям  $\Lambda_s = 1.5$  ГэВ и  $\Lambda_s = 0.8$  ГэВ соответственно

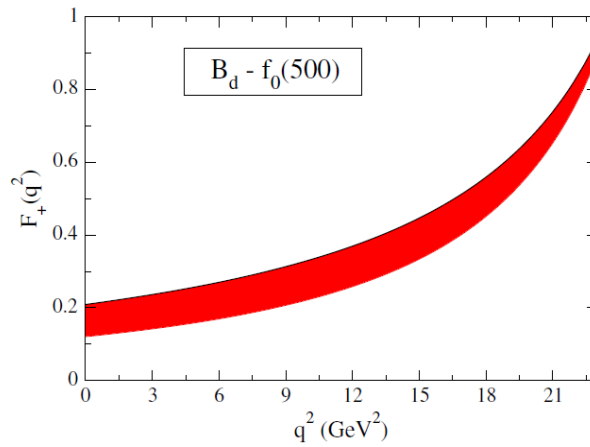


Рисунок 8 –  $F_+(q^2)$  формфакторы для перехода  $B_d^0 \rightarrow f_0(500)$ .

Верхние и нижние края соответствуют значениям  $\Lambda_s = 1.5$  ГэВ и  $\Lambda_s = 0.8$  ГэВ соответственно

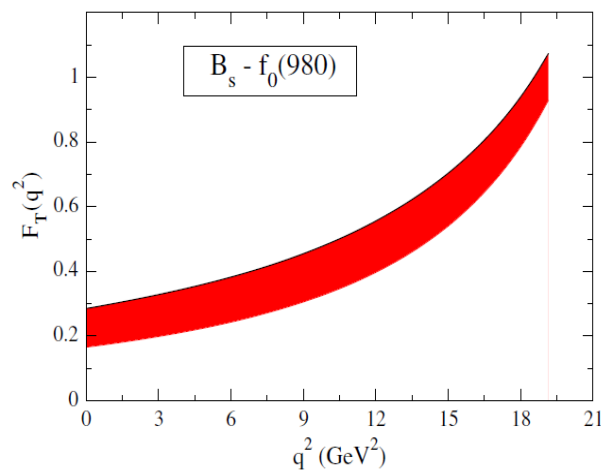


Рисунок 9 –  $F_T(q^2)$  формфакторы для перехода  $B_s^0 \rightarrow f_0(980)$ .

Верхние и нижние края соответствуют значениям  $\Lambda_s = 1.5$  ГэВ и  $\Lambda_s = 0.8$  ГэВ соответственно

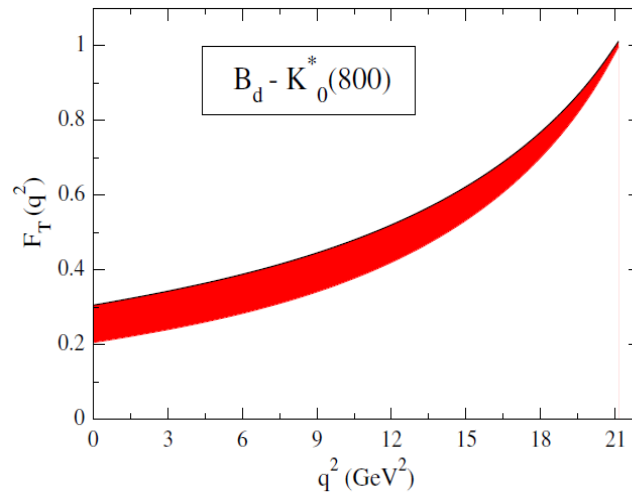


Рисунок 10 –  $F_T(q^2)$  формфакторы для перехода  $B_d^0 \rightarrow K_0^*(800)$ .

Верхние и нижние края соответствуют значениям  $\Lambda_S = 1.5$  ГэВ и  $\Lambda_S = 0.8$  ГэВ соответственно

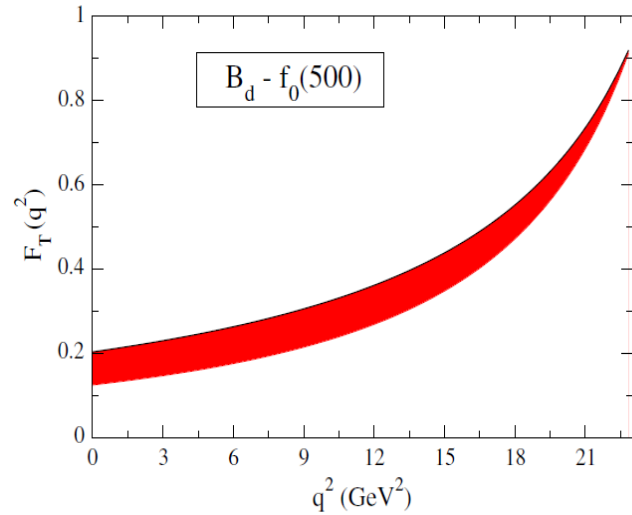


Рисунок 11 –  $F_T(q^2)$  формфакторы для перехода  $B_d^0 \rightarrow f_0(500)$ .

Верхние и нижние края соответствуют значениям  $\Lambda_S = 1.5$  ГэВ и  $\Lambda_S = 0.8$  ГэВ соответственно

На сегодняшний день опубликовано несколько работ, посвященных  $B \rightarrow S$  переходам [22, 24]. Мы приводим максимальные значения формфакторов в нашей модели и сравниваем их с результатами других работ в таблице 2.

Таблица 2 – Значения формфакторов при  $q^2 = 0$  в ковариантной модели кварков (при  $\Lambda_S = 1.5$  ГэВ) и других подходах

$B - S$	$F(0)$	Наша модель	[22]	[24]	[10]	[20]	[30]	[31]
$B_d^0 - a_0^+(980)$	$F_+(0)$	0.192	0.58	0.56				
$B_s^0 - K_0^{*0}(800)$	$F_+(0)$	0.274	0.44	0.53				
$B_s^0 - f_0(980)$	$F_+(0)$	0.254	0.45	0.44	0.19	0.35	0.12	0.40
	$F_T(0)$	0.285	0.60	0.58	0.23	0.40	-0.08	
$B_d^0 - K_0^{*0}(800)$	$F_+(0)$	0.306	0.50	0.46				
	$F_T(0)$	0.306	0.67	0.58				
$B_d^0 - f_0(500)$	$F_+(0)$	0.210						
	$F_T(0)$	0.203						

**Выводы**

В свете изучения неопределенности в полном угловом распределении распада  $B \rightarrow K^* (\rightarrow K\pi) \mu^+ \mu^-$ , которая вызвана вкладом от промежуточного скалярного  $K_0^*$  резонанса, в данной работе в рамках ковариантной модели кварков вычислены формфакторы переходов  $B(B_S) \rightarrow S$ , где  $S$  есть скалярный мезон. Поведение формфакторов получено во всей кинематической области квадрата переданного импульса. Вычисления проведены для нонета скалярных мезонов с массами меньше 1 ГэВ ( $f_0(500)$ ,  $f_0(980)$ ,  $a_0(980)$  и  $K_0^*(800)$ ) в предположении, что они являются простейшими кварк-антикварковыми состояниями.

**Благодарность**

Данная статья выполнена в рамках грантового финансирования научных проектов Министерства образования и науки Республики Казахстан по теме 3092/ГФ4, номер государственной регистрации №0115РК01040, а также гранта «ЛП ВУЗа-2016».

**ЛИТЕРАТУРА**

- [1] LHCb Collaboration, Aaij R. et. al. Measurement of Form-Factor-Independent Observables in the Decay" // Phys.Rev.Lett. – 2013.–Vol.111, №19. –P.191801 // arXiv: 1308.1707 [hep-ex] Godfrey S. and Napolitano J. // Rev. Mod. Phys. 71, 1411 (1999), [arXiv:hep-ph/9811410].
- [2] Aaij R. et. al. Differential branching fraction and angular analysis of the decay // Journal of High Energy Physics – 2013. –Vol.1308. –P.131 // arXiv: 1304.6325 [hep-ex].
- [3] Altmannshofer W., Straub D.M. New physics in  $b \rightarrow s$  transitions after LHC run 1 // Eur.Phys.J. C – 2015. –Vol.75, №8. –P.382 // arXiv: 1411.3161 [hep-ph].
- [4] Descotes-Genon S. et. al. Implications from clean observables for the binned analysis of  $B \rightarrow K^* \mu^+ \mu^-$  at large recoil // Journal of High Energy Physics – 2013. –Vol. 1301. –P.048 // arXiv: 1207.2753 [hep-ph].
- [5] Hurth T. and Mahmoudi F. On the LHCb anomaly in  $B \rightarrow K^* \ell^+ \ell^-$  // J. High Energy Phys. – 2014. –Vol. 1404. –P.097 // arXiv: 1312.5267 [hep-ph].
- [6] Datta A., Duraisamy M. and Ghosh D. Explaining the  $B \rightarrow K \mu^+ \mu^-$  data with scalar interactions // Phys.Rev. D – 2014. –Vol. 89, №7. –P.071501 // arXiv: 1310.1937 [hep-ph].
- [7] Bobeth C., Hiller G. and van Dyk D. General analysis of  $B^- \rightarrow K^-(*) \ell^+ \ell^-$  decays at low recoil // Phys.Rev. D – 2013. –Vol. 87, №3. –P.034016 // arXiv: 1212.2321 [hep-ph].
- [8] Mandal R., Sinha R. and Das D. Testing New Physics Effects in  $B \rightarrow K^* \ell^+ \ell^-$  // Phys.Rev. D – 2014. –Vol. 90, №9. –P.096006 // arXiv:1409.3088 [hep-ph].
- [9] Ali A. et. al. A Comparative study of the decays  $B \rightarrow (K, K^*) \ell^+ \ell^-$  in standard model and supersymmetric theories // Phys. Rev. D – 2000. –Vol. 61. –P.074024.
- [10] Colangelo P. et. al. QCD sum rule analysis of the decays  $B \rightarrow K \ell^+ \ell^-$  and  $B \rightarrow K^* \ell^+ \ell^-$  // Phys.Rev. D – 1996. –Vol. 53. –P.3672-3686 // Erratum: Phys.Rev. D – 1998. –Vol. 57. –P.3186.
- [11] Melikhov D., Nikitin N. and Simula S. Rare exclusive semileptonic  $b \rightarrow s$  transitions in the standard model // Phys.Rev. D – 1998. –Vol. 57. –P.6814-6828.
- [12] Aliev T. M., Ozpineci A. and Savci M. Exclusive  $B \rightarrow K^* \ell^+ \ell^-$  decay with polarized  $K^*$  and new physics effects // Phys.Lett. B – 2001. –Vol. 511. –P.49-58.
- [13] Chen C.H. and Geng C.Q. Analysis of  $B \rightarrow K^* \ell^+ \ell^-$  decays at large recoil region // Nucl.Phys. B – 2002. –Vol. 636. –P.338-364.
- [14] Ebert D., Faustov R.N. and Galkin V.O. Rare Semileptonic Decays of B and Bc Mesons in the Relativistic Quark Model // Phys.Rev. D – 2010. –Vol. 82. –P.034032 // arXiv: 1006.4231 [hep-ph].
- [15] Ivanov M.A. et. al. B- to light-meson transition form-factors // Phys.Rev. D – 2007. –Vol. 76. –P.034018.
- [16] Yang M.Z. Semileptonic decay of B and D  $\rightarrow K^*(1430) \ell^+ \ell^-$  from QCD sum rule // Phys.Rev. D – 2006. –Vol. 73. –P.034027 // Erratum: Phys.Rev. D – 2006. –Vol. 73. –P.079901.
- [17] Chen C.H. et. al. Study of  $B \rightarrow K^*(0)(1430) \ell^+ \ell^-$  decays // Phys.Rev. D – 2007. –Vol. 75. –P.074010.
- [18] Aliev T.M., Azizi K. and Savci M. Analysis of rare  $B \rightarrow K^*(0)(1430) \ell^+ \ell^-$  decay within QCD sum rules // Phys.Rev. D – 2007. –Vol. 76. –P.074017 // arXiv:0710.1508 [hep-ph].
- [19] Wang Y.M., Aslam M.J. and Lu C.D. Scalar mesons in weak semileptonic decays of B(s) // Phys.Rev. D – 2008. –Vol. 78 –P.014006 // arXiv:0804.2204 [hep-ph].
- [20] Li R.H. et. al. B  $\rightarrow S$  Transition Form Factors in the PQCD approach // Phys.Rev. D – 2009. –Vol. 79. –P.014013 // arXiv:0811.2648 [hep-ph].
- [21] Colangelo P., De Fazio F. and Wang W.  $B_s \rightarrow f_0(980)$  form factors and  $B_s$  decays into  $f_0(980)$  // Phys.Rev. D – 2010. –Vol. 81. –P.074001 // arXiv:1002.2880 [hep-ph].
- [22] Sun Y.J. et. al. B(s)  $\rightarrow S$  transitions in the light cone sum rules with the chiral current // Phys.Rev. D – 2011. –Vol. 83. –P.025024 // arXiv:1011.3901 [hep-ph].

- [23] Han H. Y. et. al. Twist-3 Distribution Amplitudes of Scalar Mesons within the QCD Sum Rules and Its Application to the  $B \rightarrow S$  Transition Form Factors // *Eur.Phys.J. A* – 2013. –Vol. 49. –P.78 // arXiv:1301.3978 [hep-ph].
- [24] Wang Z.G.  $B \rightarrow S$  transition form-factors with the light-cone QCD sum rules // *Eur.Phys.J. C* – 2015. –Vol. 75, №2. – P.50 // arXiv:1409.6449 [hep-ph].
- [25] G-fitter, A Generic Fitter Project for HEP Model Testing // *Chin.Phys.* – 2014. №38. –P.090001.
- [26] Исадыков А.Н. и др. // Известия НАН РК серия физ. - мат. – 2015. –Т.303, №5.
- [27] Исадыков А.Н., Иванов М.А., Сахиев С.К. // Вестник ЕНУ серия естественно-технических наук – 2015. – Т.107, №4.
- [28] Исадыков А.Н. и др. // Вестник КазНУ серия физическая – 2015. –Т.54.
- [29] Kruger F. and Matias J. Probing new physics via the transverse amplitudes of  $B_0 \rightarrow K^* \ell^+ \ell^-$  at large recoil // *Phys.Rev. D* – 2005. –Vol. 71. –P.094009.
- [30] Ghahramany N. and Khosravi R. Analysis of the rare semileptonic decays of  $B_s$  to  $f_0(980)$  and  $K^*(1430)$  scalar mesons in QCD sum rules // *Phys.Rev. D* – 2009. –Vol. 80. –P.016009.
- [31] El-Bennich B. et. al. The Scalar Meson  $f_0(980)$  in Heavy-Meson Decays // *Phys.Rev. D* – 2009. –Vol. 79. –P.076004 // arXiv:0810.5771 [hep-ph].

## REFERENCES

- [1] LHCb Collaboration, Aaij R. et. al. Measurement of Form-Factor-Independent Observables in the Decay" // *Phys.Rev.Lett.* 2013. Vol.111, №19. P.191801 // arXiv: 1308.1707 [hep-ex] Godfrey S. and Napolitano J. // *Rev. Mod. Phys.* 71, 1411 (1999), [arXiv:hep-ph/9811410].
- [2] Aaij R. et. al. Differential branching fraction and angular analysis of the decay // *Journal of High Energy Physics.* 2013. Vol.1308. P.131 // arXiv: 1304.6325 [hep-ex].
- [3] Altmannshofer W., Straub D.M. New physics in  $b \rightarrow s$  transitions after LHC run 1 // *Eur.Phys.J. C* 2015. Vol.75, №8. P.382 // arXiv: 1411.3161 [hep-ph].
- [4] Descotes-Genon S. et. al. Implications from clean observables for the binned analysis of  $B \rightarrow K^* \mu^+ \mu^-$  at large recoil // *Journal of High Energy Physics.* 2013. Vol. 1301. P.048 // arXiv: 1207.2753 [hep-ph].
- [5] Hurth T. and Mahmoudi F. On the LHCb anomaly in  $B \rightarrow K^* \ell^+ \ell^-$  // *J. High Energy Phys.* 2014. Vol. 1404. P.097 // arXiv: 1312.5267 [hep-ph].
- [6] Datta A., Duraisamy M. and Ghosh D. Explaining the  $B \rightarrow K^* \mu^+ \mu^-$  data with scalar interactions // *Phys.Rev. D.* 2014. –Vol. 89, №7. –P.071501 // arXiv: 1310.1937 [hep-ph].
- [7] Bobeth C., Hiller G. and van Dyk D. General analysis of  $B^- \rightarrow K^{*0} \ell^+ \ell^-$  decays at low recoil // *Phys.Rev. D* – 2013. –Vol. 87, №3. –P.034016 // arXiv: 1212.2321 [hep-ph].
- [8] Mandal R., Sinha R. and Das D. Testing New Physics Effects in  $B \rightarrow K^* \ell^+ \ell^-$  // *Phys.Rev. D* – 2014. –Vol. 90, №9. – P.096006 // arXiv:1409.3088 [hep-ph].
- [9] Ali A. et. al. A Comparative study of the decays  $B \rightarrow (K, K^*) \ell^+ \ell^-$  in standard model and supersymmetric theories // *Phys. Rev. D* – 2000. Vol. 61. P.074024.
- [10] Colangelo P. et. al. QCD sum rule analysis of the decays  $B \rightarrow K \ell^+ \ell^-$  and  $B \rightarrow K^* \ell^+ \ell^-$  // *Phys.Rev. D* – 1996. –Vol. 53. –P.3672-3686 // Erratum: *Phys.Rev. D* – 1998. Vol. 57. P.3186.
- [11] Melikhov D., Nikitin N. and Simula S. Rare exclusive semileptonic  $b \rightarrow s$  transitions in the standard model // *Phys.Rev. D* – 1998. Vol. 57. P.6814-6828.
- [12] Aliev T. M., Ozpineci A. and Savci M. Exclusive  $B \rightarrow K^* \ell^+ \ell^-$  decay with polarized  $K^*$  and new physics effects // *Phys.Lett. B* – 2001. Vol. 511. P.49-58.
- [13] Chen C.H. and Geng C.Q. Analysis of  $B \rightarrow K^* \ell^+ \ell^-$  decays at large recoil region // *Nucl.Phys. B* – 2002. Vol. 636. P.338-364.
- [14] Ebert D., Faustov R.N. and Galkin V.O. Rare Semileptonic Decays of B and Bc Mesons in the Relativistic Quark Model // *Phys.Rev. D* – 2010. Vol. 82. P.034032 // arXiv: 1006.4231 [hep-ph].
- [15] Ivanov M.A. et. al.  $B \rightarrow$  light-meson transition form-factors // *Phys.Rev. D* – 2007. Vol. 76. P.034018.
- [16] Yang M.Z. Semileptonic decay of B and D  $\rightarrow K^*(1430) \ell^+ \ell^-$  from QCD sum rule // *Phys.Rev. D* – 2006. Vol. 73. P.034027 // Erratum: *Phys.Rev. D* – 2006. Vol. 73. P.079901.
- [17] Chen C.H. et. al. Study of  $B \rightarrow K^*(0)(1430) \ell^+ \ell^-$  decays // *Phys.Rev. D* – 2007. –Vol. 75. –P.074010.
- [18] Aliev T.M., Azizi K. and Savci M. Analysis of rare  $B \rightarrow K^*(0)(1430) \ell^+ \ell^-$  decay within QCD sum rules // *Phys.Rev. D* – 2007. –Vol. 76. –P.074017 // arXiv:0710.1508 [hep-ph].
- [19] Wang Y.M., Aslam M.J. and Lu C.D. Scalar mesons in weak semileptonic decays of B(s) // *Phys.Rev. D* – 2008. Vol. 78 –P.014006 // arXiv:0804.2204 [hep-ph].
- [20] Li R.H. et. al.  $B \rightarrow S$  Transition Form Factors in the PQCD approach // *Phys.Rev. D* – 2009. Vol. 79. P.014013 // arXiv:0811.2648 [hep-ph].
- [21] Colangelo P., De Fazio F. and Wang W.  $B_s \rightarrow f_0(980)$  form factors and  $B_s$  decays into  $f_0(980)$  // *Phys.Rev. D* – 2010. Vol. 81. P.074001 // arXiv:1002.2880 [hep-ph].
- [22] Sun Y.J. et. al.  $B(s) \rightarrow S$  transitions in the light cone sum rules with the chiral current // *Phys.Rev. D* – 2011. Vol. 83. P.025024 // arXiv:1011.3901 [hep-ph].
- [23] Han H. Y. et. al. Twist-3 Distribution Amplitudes of Scalar Mesons within the QCD Sum Rules and Its Application to the  $B \rightarrow S$  Transition Form Factors // *Eur.Phys.J. A* – 2013. –Vol. 49. –P.78 // arXiv:1301.3978 [hep-ph].
- [24] Wang Z.G.  $B \rightarrow S$  transition form-factors with the light-cone QCD sum rules // *Eur.Phys.J. C* – 2015. Vol. 75, №2. P.50 // arXiv:1409.6449 [hep-ph].

- [25] G-fitter, A Generic Fitter Project for HEP Model Testing // Chin.Phys. 2014. №38. P.090001.  
 [26] Issadykov A.N. i dr. // Izvestiya NAN RK seriya fiz. - mat. 2015. V.303, №5.  
 [27] Issadykov A.N., Ivanov M.A., Sakhiyev S.K. // Vestnik ENU seriya estestvenno-tekhnicheskikh nauk – 2015. V.107, №4.  
 [28] Issadykov A.N. i dr. // Vestnik KazNU seriya fizicheskaya – 2015. V.54.  
 [29] Kruger F. and Matias J. Probing new physics via the transverse amplitudes of  $B_0 \rightarrow K^*0 (-\rightarrow K- \pi^+) l+l-$  at large recoil // Phys.Rev. D – 2005. Vol. 71. P.094009.  
 [30] Ghahramany N. and Khosravi R. Analysis of the rare semileptonic decays of  $B_s$  to  $f_0(980)$  and  $K-0^*(1430)$  scalar mesons in QCD sum rules // Phys.Rev. D – 2009. –Vol. 80. –P.016009.  
 [31] El-Bennich B. et. al. The Scalar Meson  $f_0(980)$  in Heavy-Meson Decays // Phys.Rev. D – 2009.Vol. 79. P.076004 // arXiv:0810.5771 [hep-ph].

**А.Н. Исадыков<sup>1,2</sup>, М.А. Иванов<sup>1</sup>, Г.С. Нурбакова<sup>2,3</sup>, Г.Г. Сайдуллаева<sup>2,3</sup>, С.Б. Рустембаева<sup>2,3</sup>**

<sup>1</sup>Біріккен ядролық зерттеулер институты, Дубна қ-сы, Ресей Федерациясы;

<sup>2</sup>Эксперименттік және теориялық физика ғылыми-зерттеу институты, Алматы қ-сы, Қазақстан Республикасы;

<sup>3</sup>Әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық Университеті, Алматы қ-сы, Қазақстан Республикасы)

### **B–S АУЫСУЫНЫҢ ФОРМФАКТОРЛАРЫН ЕСЕПТЕУ**

**Аннотация.** Бұл жұмыста кварктардың коварианттық моделінің аясында  $B(B_S) \rightarrow S$  (мұндағы  $S$  - скаляр мезон) ауысуының формфакторлары есептелінген.  $B \rightarrow S$  ауысуының матрицалық элементінің диаграммасы келтірілген. Формфакторлардың өзгеру тәртібі берілген импульстің квадратының дерлік кинематикалық аймағында есептелінді. Формфакторларды есептеу  $\Lambda_S$  параметрінің әр түрлі мәндері үшін жүргізілді. Біз бұл параметрді  $\Lambda_S \in [0.8, 1.5]$  ГэВ интервалы аралығында өзгерттік. Берілген импульстің аздаған мәндерінде формфакторлардың  $\Lambda_S$  параметрін таңдауға қатысты сезімталдығы айқынырақ және де нольдік қайтарым маңында сезімталдығы аздау. Алынған формфакторлардың сандық мәндерін басқа жұмыстардың нәтижелерімен салыстырдық. Мезондарды қарапайым кварк-антикварктық күйлер ретінде қарастыруға болады деген болжаммен, есептеулер массалары 1 ГэВ-тен аз болатын скаляр мезондар нонетіне ( $f_0(500)$ ,  $f_0(980)$ ,  $a_0(980)$  және  $K_0^*(800)$ ) жүргізілді.

**Тірек сөздер:** Формфакторлар, скалярлық мезон, кварктардың коварианттық моделі.

#### **Сведения об авторах:**

Исадыков А. Н. – PhD доктор, научный сотрудник в ЛТФ им. Н. Н. Боголюбова, ОИЯИ, Дубна, Российская Федерация, научный сотрудник НИИЭТФ, Алматы, Республика Казахстан тел: + 7 701 4000 674, email: issadykov.a@gmail.com;

Иванов М. А. – д.ф.-м.н., профессор, начальник сектора в ЛТФ им. Н. Н. Боголюбова, ОИЯИ, Дубна, Российская Федерация, email: [ivanovm@theor.jinr.ru](mailto:ivanovm@theor.jinr.ru);

Нурбакова Г. С. – к.ф.-м.н., доцент Казахского национального университета им. аль-Фараби, ведущий научный сотрудник НИИЭТФ, Алматы, Республика Казахстан Алматы, тел: + 7 707 724 67 80, email: [g\\_nurbakova@gmail.com](mailto:g_nurbakova@gmail.com);

Сайдуллаева Г.Г. - PhD доктор, ст.преподаватель Казахского национального университета им. аль-Фараби, научный сотрудник НИИЭТФ, Алматы, Республика Казахстан Алматы, email: [guzch\\_08@gmail.com](mailto:guzch_08@gmail.com);

Рустембаева С.Б. – магистрант Казахского национального университета им. аль-Фараби, научный сотрудник НИИЭТФ, Алматы, Республика Казахстан, тел: +7 707 332 61 62.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN  
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 6, Number 316 (2017), 78 – 84

G.S. Nurbakova<sup>1,2</sup>, N. Habyl<sup>1,2</sup>, D.S. Valiolda<sup>1,2</sup>, Zh. Zh. Tyulemisov<sup>2,3</sup>

<sup>1</sup>Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Republic of Kazakhstan;

<sup>2</sup>Scientific Research Institutes of Experimental and theoretical physics, Almaty, Republic of Kazakhstan;

<sup>3</sup>Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, Russian Federation)

[g.nurbakova@gmail.com](mailto:g.nurbakova@gmail.com), [nuigui@mail.ru](mailto:nuigui@mail.ru)

## FORM FACTORS FOR $\Lambda_b \rightarrow \Lambda_c$ TRANSITION

**Abstract.** Using the covariant quark model with infrared confinement we calculate the form factors of the  $\Lambda_b \rightarrow \Lambda_c$  transitions. Form factors are used to calculate the physical observables for this hadron decays.

The results of our numerical two-loop calculation are well represented by a double-pole parametrization with high accuracy: the relative error is less than 1%. We obtain the values for slope and convexity parameters. We compare our results with the experimental data and other theoretical works.

In the framework of the covariant quark model we can calculate the transition form factors in the full kinematical region of momentum transfer.

**Keywords:** Covariant quark model, transition form factors, heavy quarks.

УДК 530.145; 530.12; 539.12-17

Г.С. Нурбакова<sup>1,2</sup>, Н. Хабыл<sup>1,2</sup>, Д.С. Валиолда<sup>1,2</sup>, Ж.Ж. Тюлемисов<sup>2,3</sup>

<sup>1</sup>Казахский Национальный Университет им. аль-Фараби, г. Алматы, Республика Казахстан;

<sup>2</sup>Научно-исследовательский институт экспериментальной и теоретической физики, г. Алматы, Республика Казахстан;

<sup>3</sup>Объединенный Институт Ядерных Исследований, г. Дубна, Российская Федерация)

## ФОРМФАКТОР ДЛЯ ПЕРЕХОДА $\Lambda_b \rightarrow \Lambda_c$

**Аннотация.** В данной работе были вычислены формфакторы для перехода  $\Lambda_b \rightarrow \Lambda_c$  в рамках ковариантной кварковой модели с инфракрасным конфинментом. Формфакторы необходимы для расчётов физических наблюдаемых распадов данных адронов.

Результаты численных двухпетлевых расчетов были изображены двухполюсной параметризацией с высокой точностью: относительная погрешность составляет менее 1%. Получены численные значения для параметра наклона и параметра выпуклости. Приведено сравнение полученных результатов с имеющимися экспериментальными данными и предсказаниями других теоретических подходов.

Ковариантная кварковая модель с инфракрасным конфинментом позволяет вычислять формфакторы во всей кинематической области квадрата переданного импульса.

**Ключевые слова:** ковариантная кварковая модель, переходный формфактор, тяжелые кварки.

### Введение

В настоящее время значительно вырос интерес к исследованию процессов с участием адронов, содержащих тяжелые кварки. Например, кварк-антикварковые состояния  $B$  и  $D$  мезоны, и трёхкварковые состояния  $\Lambda_b$  и  $\Lambda_c$  барионы. Данные состояния распадаются лишь за счёт слабых взаимодействий с изменением флэйвора (аромата) кварков. Распады данных тяжелых адронов достижимы на современных экспериментальных установках и характеристики данных распадов измеряются во всё более увеличивающейся точностью.

Теоретические исследования полулептонных и редких распадов тяжелых адронов можно разделить на две части. Первая часть связана с описанием вкладов малых расстояний в рамках теории возмущений, стандартной модели с привлечением методов ренормализационной группы и операторных разложений. Результатом является вывод эффективных слабых гамильтонианов, которые описывают слабые переходы кварков и лептонов. Эффективные гамильтонианы представляют собой набор локальных кварк-кварковых и кварк-лептонных операторов, умноженных на так называемые коэффициенты Вильсона [1]. Численные значения коэффициентов Вильсона вычисляются по теории возмущений с достаточно высокой точностью. Вторая часть исследований полулептонных и редких распадов связана с вычислением матричных элементов локальных операторов между начальными и конечными состояниями. Эта часть, связанная с учётом вкладов больших расстояний, привносит наибольшую неопределённость при вычислении физических наблюдаемых, поскольку в этом случае необходимо привлекать непертурбативные методы, т.е. выход за рамки теории возмущений. Здесь мы сталкиваемся с проблемой адронизации, т.е. с проблемой описания механизма построения адронов из кварков. Технически, любой матричный элемент локального оператора может быть выражен через набор лоренцовских структур, умноженных на скалярные функции, которые зависят от кинематических переменных. Данные скалярные функции называются формфакторами и их вычисление является основной задачей теории.

Существует достаточно много теоретических подходов для вычисления необходимых адронных формфакторов. В данной работе для вычисления адронных формфакторов используется ковариантная модель кварков. Данная модель является эффективным квантовополевым подходом к адронным взаимодействиям, основанным на определённых предположениях об адронизации и конфайнменте кварков. Исходным объектом является лагранжиан взаимодействия адрона с его составляющими кварками. Константа связи, характеризующая данное взаимодействие, определяется из так-называемого условия связности, которое требует равенства нулю константы перенормировки волновой функции адрона, возникающей в результате взаимодействия адрона с кварками. Матричные элементы физических процессов определяются набором кварковых диаграмм. Следует отметить, что модель позволяет описывать единым образом как простейшие кварк-антикварковые состояния (мезоны), так и более сложные образования, например, барионы, состоящие из трёх кварков. Для запрета появления свободных кварков в наблюдаемом адронном спектре, называемого конфайнментом кварков, в модели используется процедура инфракрасного обрезания по единственному размерному параметру интегрирования в пространстве параметров Фока-Швингера. Ковариантная модель кварков содержит несколько свободных параметров: массы конститuentных кварков, параметр инфракрасного обрезания, характеризующий область конфайнмента, и параметры, которые описывают эффективные размеры адронов. Их численные значения определены с помощью фита хорошо установленных величин к их экспериментальным значениям. Модель нашла широкое применение как в физике лёгких адронов [2-6], так и в физике тяжёлых кварков [7-12]. В частности, модель позволяет вычислять адронные формфакторы, возникающие в распадах  $B$ -мезона и  $\Lambda_b$ -бариона во всей кинематической области квадрата переданного импульса.

### Спиральные амплитуды

Будем рассматривать распад  $\Lambda_b^0(p_1) \rightarrow \Lambda_c^+(p_2) + l^+ l^-(q)$ . Где,  $p_1$  и  $p_2$  – импульсы начального и дочернего барионов,  $q$  – суммарный импульс лептона и антилептона.

Матричный элемент процесса  $\Lambda_b^0(p_1) \rightarrow \Lambda_c^+(p_2) + W_{off-shell}^-(q)$  выражается через матричный элемент векторного и аксиально-векторного тока, которые могут быть записаны по полному набору инвариантов:

$$M_{\mu}^V(\lambda_1, \lambda_2) = \langle B_2, \lambda_2 | J_{\mu}^V | B_1, \lambda_1 \rangle$$

$$= \bar{u}_2(p_2, \lambda_2) \left[ F_1^V(q^2) \gamma_{\mu} - \frac{F_2^V(q^2)}{M_1} i \sigma_{\mu\nu} q^{\nu} + \frac{F_3^V(q^2)}{M_1} q_{\mu} \right] u_1(p_1, \lambda_1), \quad (1)$$

$$M_\mu^A(\lambda_1, \lambda_2) = \langle B_2, \lambda_2 | J_\mu^A | B_1, \lambda_1 \rangle$$

$$= \bar{u}_2(p_2, \lambda_2) \left[ F_1^A(q^2) \gamma_\mu - \frac{F_2^A(q^2)}{M_1} i \sigma_{\mu\nu} q^\nu + \frac{F_3^A(q^2)}{M_1} q_\mu \right] \gamma_5 u_1(p_1, \lambda_1), \quad (2)$$

где  $\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}(\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu)$  и  $q = p_1 - p_2$ . Буквами  $\lambda_i = \pm \frac{1}{2}$  обозначены спиральности двух барионов. В данном случае  $B_1 = \Lambda_b$  и  $B_2 = \Lambda_c$ .

В стандартной модели ток не сохраняется. Он представляет собой суперпозицию компонент со спином 1 и со спином 0, где  $J^P$  содержит векторный ток  $J_\mu^V$  и аксиально-векторный  $J_\mu^A$  ток, которые соответственно имеют вид  $(0^+, 1^-)$  и  $(0^-, 1^+)$ . Спиральные амплитуды определяются в следующем виде

$$H_{\lambda_2 \lambda_W}^{V/A} = M_\mu^{V/A}(\lambda_2) \epsilon^{+\mu}(\lambda_W), \quad (3)$$

где спиральность эффективного тока  $W_{off-shell}^-$  имеет четыре компоненты  $\lambda_W = \pm 1, 0$  ( $J=1$ ) и  $\lambda_W = 0$ , ( $J=0$ ). Под  $J=1, 0$  обозначены два угловых момента системы покоя  $W_{off-shell}^-$ . Для того, чтобы отличить два  $\lambda_W = 0$  состояния, сделаем следующие обозначения:  $\lambda_W = 0$  для  $J=1$  и  $\lambda_W = t$  для  $J=0$ . Из закона сохранения углового момента имеем:  $\lambda_1 = -\lambda_2 + \lambda_W$ .

Спиральные амплитуды легко вычисляются в системе покоя начального бариона  $B_1$ . Они определяются следующим образом:

$$H_{\frac{1}{2}^+ \frac{1}{2}^+}^{V/A} = \frac{\sqrt{Q_\pm}}{\sqrt{q^2}} \left( M_\mp F_1^{V/A} \pm \frac{q^2}{M_1} F_3^{V/A} \right),$$

$$H_{\frac{1}{2}^+ \frac{1}{2}^+}^{V/A} = \sqrt{2Q_\mp} \left( F_1^{V/A} \pm \frac{M_\pm}{M_1} F_2^{V/A} \right), \quad (4)$$

$$H_{\frac{1}{2}^+ \frac{1}{2}^0}^{V/A} = \frac{\sqrt{Q_\mp}}{\sqrt{q^2}} \left( M_\pm F_1^{V/A} \pm \frac{q^2}{M_1} F_2^{V/A} \right),$$

где мы использовали обозначения  $M_\pm = M_1 \pm M_2$  и  $Q_\pm = M_\pm^2 - q^2$ . Из четности или из явных вычислений имеем

$$H_{-\lambda_2, -\lambda_W}^V = H_{\lambda_2, \lambda_W}^V \quad H_{-\lambda_2, -\lambda_W}^A = -H_{\lambda_2, \lambda_W}^A. \quad (5)$$

Полная лево-киральная спиральная амплитуда определяется соотношением

$$H_{\lambda_2, \lambda_W} = H_{\lambda_2, \lambda_W}^V - H_{\lambda_2, \lambda_W}^A.$$



### Формфакторы для перехода $\Lambda_b(bud) \rightarrow \Lambda_c(cud)$

Мы используем ковариантную кварковую модель с инфракрасным кофайнментом, для описания динамику переходов  $\Lambda_b = (b[ud])$  к  $\Lambda_c = (c[ud])$  [13-15]. Результаты наших численных двухпетлевых расчетов хорошо изображается двухполюсной параметризацией

$$F(q^2) = \frac{F(0)}{1 - as + bs^2}, \quad s = \frac{q^2}{M_1^2} \quad (7)$$

с высокой точностью: относительная погрешность составляет менее 1%. На рисунках 1,2,3 показаны сравнения точных результатов для релятивистских формфакторов  $F_i^V$  и  $F_i^A$  ( $i = 1, 2, 3$ ) с результатами двухполюсной параметризации. Параметры аппроксимированного вида формфакторов для  $\Lambda_b \rightarrow \Lambda_c$  перехода приведены в таблице 1.

Таблица 1 – Параметры аппроксимированного вида формфакторов для  $\Lambda_b \rightarrow \Lambda_c$  перехода

	$F_1^V$	$F_2^V$	$F_3^V$	$F_1^A$	$F_2^A$	$F_3^A$
F(0)	0.549	0.110	-0.023	0.542	0.018	-0.123
$a$	1.459	1.680	1.181	1.443	0.921	1.714
$b$	0.571	0.794	0.276	0.559	0.255	0.828

Зависимость доминирующих формфакторов  $F_1^V(q^2)$  и  $F_1^A(q^2)$  от  $q^2$  очень близки друг другу. Поскольку можно пренебречь другими формфакторами, результаты расчетов нашей модели очень близки к результатам ведущего порядка теории тяжелых кварков (ЭТТК)  $F_1^A(q^2) = F(q^2)$ ,  $F_{2,3}^{V/A} = 0$ . На самом деле, наши численные результаты довольно близки к тому, что можно было бы ожидать в ведущем порядке эффективной ЭТТК (рисунки 1-3).

Остановимся на зависимости формфакторов  $F_1^V(q^2) \approx F_1^A(q^2)$  от  $q^2$ . Их зависимость от  $q^2$  очень близка к поведению диполя, так как в обоих случаях имеется  $\sqrt{b} \sim a/2$  с дипольной массой  $m_{dipole} = M_1/\sqrt{a/2} \sim 606 \text{ GeV}$ . Дипольная масса довольно близка к ожидаемой ( $b\bar{c}$ ) массе 6.28 ГэВ установленный массой  $B_c$  мезона [16]. Далее будем рассматривать поведение  $F_1^V(q^2)$  и  $F_1^A(q^2)$  в области близкой к нулевой отдаче. Для того, чтобы исследовать поведение формфакторов в области близкой к нулевой отдаче мы переходим к переменной  $w = (M_1^2 + M_2^2 - q^2)/(2M_1M_2)$ , так что  $w=1$  в точке нулевой отдачи  $q^2 = q_{\max}^2 = (M_1 - M_2)^2$ . Разложение тейлора любой заданной функции  $f(w)$  по точке нулевой отдачи  $w=1$  записывается в следующем виде

$$f(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(1)}{n!} (w-1)^n = f(1) \left\{ 1 + \frac{f'(1)}{f(1)}(w-1) + \frac{f''(1)}{2f(1)}(w-1)^2 + \dots \right\} \quad (8)$$

$$\equiv f(1) \left\{ 1 - \rho^2 (w-1) + c (w-1)^2 + \dots \right\}$$

где  $\rho^2$  называется параметром наклона, а  $c$  параметром выпуклости. Не трудно выразить параметры  $f(w=1)$ ,  $\rho^2$  и  $c$  с помощью исходных параметров  $F(0)$ ,  $a$ ,  $b$  используемых в двухполюсной параметризации (ур. (7)). Получим

$$f(w=1) = \frac{F(0)}{1 - as_{\max} + bs_{\max}^2}$$

$$\rho^2 = \frac{2r(a - 2bs_{\max})}{1 - as_{\max} + bs_{\max}^2} \quad (9)$$

$$c = \frac{4r^2[a^2 - b - 3abs_{\max} + 3b^2s_{\max}^2]}{[1 - as_{\max} + bs_{\max}^2]^2}$$

где  $r = M_2/M_1$  и  $s_{\max} = (1-r)^2$ . Численные результаты для  $F_1^V(q^2)$  и  $F_1^A(q^2)$  можно вычислить как

	$f(w=1)$	$\rho^2$	$c$
$F_1^V$	0.985	1.543	1.704
$F_1^A$	0.966	1.521	1.654

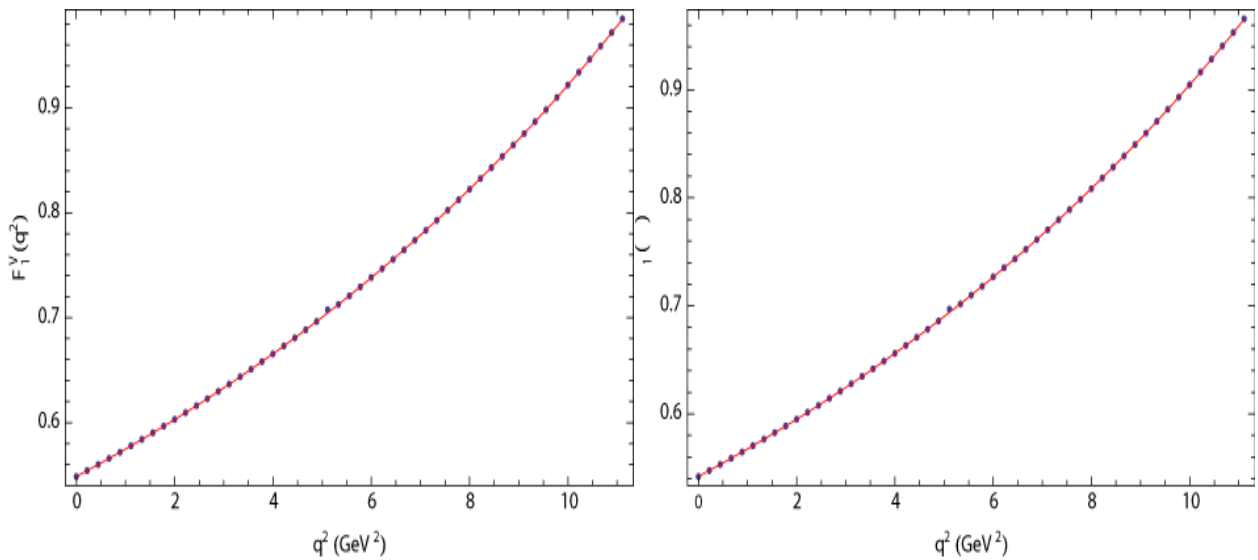
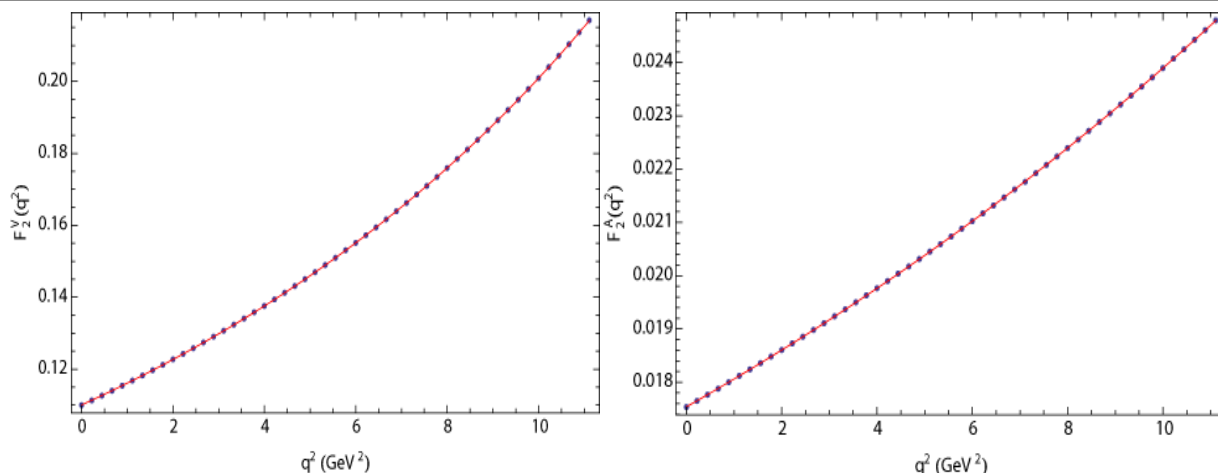
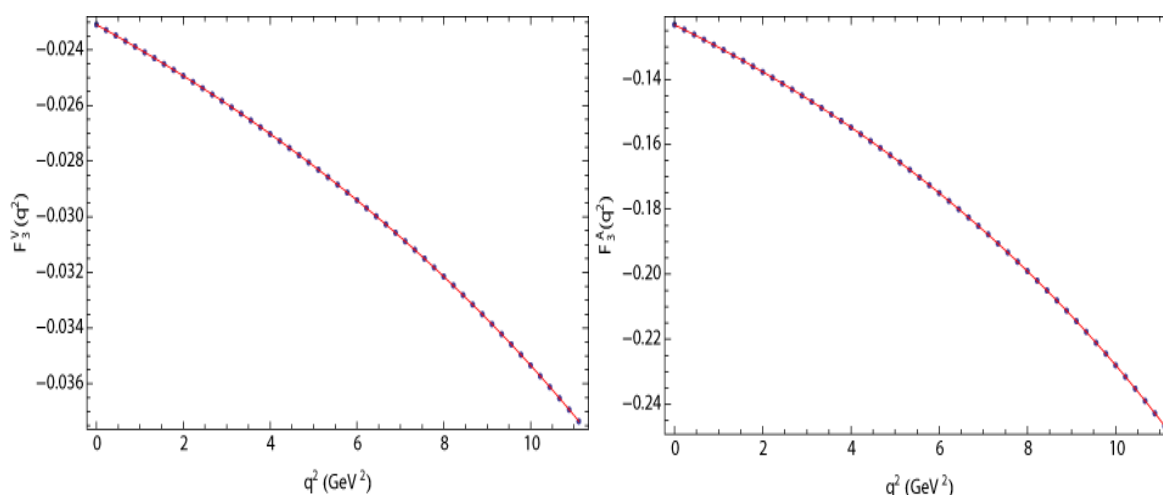
(10)


Рисунок 1 – Формфакторы  $F_1^V(q^2)$  и  $F_1^A(q^2)$

Рисунок 2 – Формфакторы  $F_2^V(q^2)$  и  $F_2^A(q^2)$ Рисунок 3 – Формфакторы  $F_3^V(q^2)$  и  $F_3^A(q^2)$ 

### Выводы

Нормировка нулевой отдачи очень близка к 1 для  $F_1^V$  и  $F_1^A$ , как и в предсказаниях ведущего порядка ЭТТК. Значения для двух параметров наклона совпадает с единственным экспериментальным результатом опубликованным коллаборацией DELPHI:  $\rho^2 = 2.03 \pm 0.46(stat)_{-1.00}^{+0.72}(syst)$  [17]. Экспериментальных результатов по параметру выпуклости пока еще нет. Есть ряд теоретических модельных расчетов для параметра наклона для  $\Lambda_b \rightarrow \Lambda_c$  перехода, многие, из которых находятся около  $\rho^2 \approx 1.5$  [18-22].

### Благодарность

Данная статья выполнена в рамках грантового финансирования научных проектов Министерства образования и науки Республики Казахстан по теме 3091/ГФ4, номер государственной регистрации №0115РК01041, а также гранта «ЛП ВУЗа-2016».

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Buchalla G., Buras A.J., Lautenbacher M.E. Weak decays beyond leading logarithms // Rev. Mod. Phys. 1996. Vol.68. P.1125-1144.
- [2] Ivanov M.A., Lyubovitskij V.E. The  $\gamma^* \pi^0 \rightarrow \gamma$  Form Factor // Phys. Lett. B. 1997. Vol.408. P.435.
- [3] Faessler A. et al. Pion and Sigma Meson Properties in a Relativistic Quark Model // Phys. Rev. D. 2003. Vol.68. P. 014011.

- [4] Ivanov M. A., Locher M. P., Lyubovitskij V. E. Electromagnetic Form Factors of Nucleons in a Relativistic Three-Quark Model // *Few Body Syst.* 1996. Vol.21. P.131.
- [5] Faessler A. et al. Semileptonic Decays of the Light  $J(P) = 1/2(+)$  Ground State Baryon Octet // *Phys. Rev. D.* 2008. Vol.78. P.094005.
- [6] Dalkarov O.D., Ryabov V.A., Sadykov T.Kh., Zhukov V.V., Nam R.A., Piskal V.V., Zastrozhnova N.N. Hadron-55 complex setup for study of hadron interactions within the central part of EAS cores // *The 34-th ICRC The Hauge, The Netherlands.* -2015. [http://pos.sissa.it/archive/conferences/236/570/ICRC2015\\_570.pdf](http://pos.sissa.it/archive/conferences/236/570/ICRC2015_570.pdf)
- [7] Ivanov M. A. et al.  $\Lambda_b$  and  $\Lambda_c$  Baryon Decays at Finite Values of Heavy Quark Masses // *Phys. Lett. B.* 2000. Vol.476. P.58.
- [8] Faessler A. et al. Semileptonic Decays of Double Heavy Baryons // *Phys. Lett. B.* 2001. Vol.518. P.55.
- [9] Faessler A. et al. Magnetic Moments of Heavy Baryons in the Relativistic Three-Quark Model // *Phys. Rev. D.* 2006. Vol.73. P.094013.
- [10] Faessler A. et al. Semileptonic Decays of Double Heavy Baryons in a Relativistic Constituent Three-Quark Model // *Phys. Rev. D.* 2009. Vol.80. P. 034025.
- [11] Branz T. et al. Radiative Decays of Double Heavy Baryons in a Relativistic Constituent Three-Quark Model Including Hyperfine Mixing // *Phys. Rev. D.* 2010. Vol.81. P.114036.
- [12] Ivanov M. A., Santorelli P. Leptonic and Semileptonic Decays of Pseudoscalar Mesons // *Phys. Lett. B.* 1999. Vol.456. -P.248.
- [13] Kadeer A., Körner J. G. and Moosbrugger U. Helicity analysis of semileptonic hyperon decays including lepton mass effects // *Eur. Phys. J. C.* 2009. Vol.59. P.27.
- [14] Gutsche T., Ivanov M. A., Körner J. G., Lyubovitskij V. E. and Santorelli P. Rare baryon decays  $\Lambda_b \rightarrow \Lambda^+ l^-$  ( $l = e, \mu, \tau$ ) and  $\Lambda_b \rightarrow \Lambda \gamma$ : Differential and total rates, lepton - and hadron-side forward-backward asymmetries // *Phys. Rev. D.* -2013. -Vol.87. -P.074031.
- [15] Gutsche T., Ivanov M. A., Körner J. G., Lyubovitskij V. E. and Santorelli P. Polarization effects in the cascade decay  $\Lambda_b \rightarrow \Lambda(p\pi^-) + J/\psi(\rightarrow l^+l^-)$  in the covariant confined quark model // *Phys. Rev. D.* 2013. Vol.88. P.114018.
- [16] Olive K. A. et al. Particle Data Group Review of particle physics // *Chin. Phys. C.* 2014. Vol.38. P.090001.
- [17] Abdallah J. et al. DELPHI Collaboration Measurement of the  $\Lambda_b^0$  decay form factor // *Phys. Lett. B.* 2004. Vol.585. P.63.
- [18] König B., Körner J. G., Krämer M. and Kroll P. Infinite momentum frame calculation of semileptonic heavy  $\Lambda_b \rightarrow \Lambda_c$  transitions including HQET improvements // *Phys. Rev. D.* 1997. Vol.56. P.4282.
- [19] Ivanov M. A., Lyubovitskij V. E., Körner J. G. and Kroll P. Heavy baryon transitions in a relativistic three quark model // *Phys. Rev. D* 1997. Vol.56. P.348.
- [20] Körner J. G. and Melic B. Exclusive inclusive ratio of semileptonic  $\Lambda_b$  decays // *Phys. Rev. D.* 2000. Vol.62. P.074008.
- [21] Hussain F., Körner J. G., Krämer M. and Thompson G. On heavy baryon decay form-factors // *Z. Phys. C.* 1991. Vol.51. P.321.
- [22] Amhis Y. et al. Heavy Flavor Averaging Group Averages of b-hadron, c-hadron, and  $\tau$ -lepton properties as of summer 2014 // <http://arxiv.org/abs/1412.7515>.

Г.С. Нурбакова<sup>1,2</sup>, Н. Хабыл<sup>1,2</sup>, Д.С. Валиолда<sup>1,2</sup>, Ж.Ж. Тюлемисов<sup>2,3</sup>

<sup>1</sup>Эл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық Университеті, Алматы қ-сы, Қазақстан Республикасы;

<sup>2</sup>Эксперименттік және теориялық физика ғылыми-зерттеу институты, Алматы қ-сы, Қазақстан Республикасы;

<sup>3</sup>Біріккен ядролық зерттеулер институты, Дубна қ-сы, Ресей Федерациясы)

### $\Lambda_b \rightarrow \Lambda_c$ АУЫСУЫ ҮШІН ФОРМФАКТОРЛАР

**Аннотация.** Бұл жұмыста инфрақызыл конфайнменті бар ковариантты кварктік модельді қолданып  $\Lambda_b \rightarrow \Lambda_c$  өтуінің формфакторлары анықталды. Жалпы, формфакторлар көмегімен көрсетілген адрондардың ыдыраулары кезіндегі физикалық шамалар анықталады.

Қос ілмектік сандық есептеу нәтижелері екі полюсті параметризация көмегімен жоғары дәлдікте көрсетілді: салыстырмалы қателігі 1% жетпейді. Қисықтық және дөңестік параметрлерінің сандық мәндері анықталды. Алынған нәтижелер эксперимент нәтижелерімен және басқа теориялық жұмыстардың нәтижелерімен салыстырылды.

Ковариантты кварктік модель форм факторларды берілген импульс квардатының мүмкін болатын кинематикалық мәндерін толық қамти отырып есептеуге мүмкіндік береді.

**Тірек сөздер:** Ковариантты кварктік модель, өту формфакторы, ауыр кварктер.

#### Сведения об авторах:

Нурбакова Г. С. – к.ф.-м.н., доцент Казахского национального университета им. аль-Фараби, ведущий научный сотрудник НИИЭТФ, Алматы, Республика Казахстан Алматы, тел: + 7 707 724 67 80, email: [g.nurbakova@gmail.com](mailto:g.nurbakova@gmail.com);

Хабыл Н. – PhD доктор, ст.преподаватель Казахского национального университета им. аль-Фараби, научный сотрудник НИИЭТФ, Алматы, Республика Казахстан Алматы, email: [nuigui@mail.ru](mailto:nuigui@mail.ru);

Валиолда Д.С. – PhD докторант Казахского национального университета им. аль-Фараби, научный сотрудник НИИЭТФ, Алматы, Республика Казахстан Алматы, email: [valiolda.dinara@gmail.com](mailto:valiolda.dinara@gmail.com);

Тюлемисов Ж.Ж. - научный сотрудник НИИЭТФ, Алматы, Республика Казахстан Алматы, научный сотрудник в ЛТФ им. Н. Н. Боголюбова, ОИЯИ, Дубна, Российская Федерация, email: [zhomart161@mail.ru](mailto:zhomart161@mail.ru).

## NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN  
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 6, Number 316 (2017), 85 – 95

**K.B.Jakupov**

Institute of mathematics and mathematical modeling, Almaty, Kazakhstan.

E-mail: [jakupovKB@mail.ru](mailto:jakupovKB@mail.ru)**REPRESENTATION OF THE METHOD  
OF THE FICTION AREAS IN HYDRODYNAMICS**

**Annotation.** The question of the representative application of the method of fictitious domains for numerical calculations of flows of a viscous incompressible fluid with use in the fictitious domain of an artificially formed system of equations of dynamics with a small parameter in the denominator and tending to zero is considered. It was investigated on a number of examples of linear differential equations of the influence of a small parameter on the convergence of the solution. The problems of establishing adequate initial and boundary conditions in a fictitious area are singled out. Specific examples with differential equations with a small parameter are given, which theoretically show the divergence of solutions as the small parameter tends to zero. Numerical calculations of flows of a viscous incompressible fluid in a channel with an internal shoulder for two types of artificial fictitious regions directly and exhaustively showed the falsity of the method of fictitious regions.

**Keywords:** equations, fictitious, region, parameter, representation.

УДК 519.6, 532.516

**К.Б. Джакупов**

Институт математики и математического моделирования МОН РК, Алматы, Казахстан

**РЕПРЕЗЕНТАТИВНОСТЬ МЕТОДА  
ФИКТИВНЫХ ОБЛАСТЕЙ В ГИДРОДИНАМИКЕ**

**Аннотация.** Рассматривается вопрос о репрезентативном применении метода фиктивных областей для численных расчетов течений вязкой несжимаемой жидкости с использованием в фиктивной области искусственно образованной системы уравнений динамики с малым параметром, стоящем в знаменателе и стремящемся к нулю. Исследовано на ряде примеров линейных дифференциальных уравнений влияния малого параметра на сходимость решения. Выделены проблемы постановки адекватных начальных и краевых условий в фиктивной области. Приведены конкретные примеры с дифференциальными уравнениями с малым параметром, теоретически показывающие расходимость решений при стремлении малого параметра к нулю. Численные расчеты течений вязкой несжимаемой жидкости в канале с внутренним уступом для двух типов искусственных фиктивных областей непосредственно и исчерпывающе показали фальшивость метода фиктивных областей.

**Ключевые слова:** уравнения, фиктивная, область, параметр, репрезентативность.

Идею введения искусственно образованных *фиктивных областей* впервые предложил Саульев в [1-2] с целью численного решения параболического уравнения в области с криволинейной границей, «неудобной» для введения прямоугольной сетки, в силу чего фиктивные области должны быть прямоугольными в разностных методах. В гидродинамике [3] метод фиктивных областей (м.ф.о.) был сведен к тому, что на границе фиктивной области ошибочно поставили *нулевые* краевые условия для давления и скорости в задачах гидродинамики с целью перевода задачи Неймана для давления в задачу Дирихле. *Нулевые* краевые условия для давления противоречат физике течения жидкости в том смысле, что в уравнения динамики жидкости входит

градиент давления, в силу чего давление определяется с точностью до аддитивной функции в нестационарных течениях и с точностью до произвольной константы в стационарных. Кроме указанного, фальшивость м.ф.о. состоит в том, что произвольно стыкуются решения двух самостоятельных начально-краевых задач для различных по существу систем дифференциальных уравнений в частных производных, затем решение задачи в фиктивной нефизической области используется в основной исходной задаче гидродинамики в численных расчетах, что явным образом приводит к искажению решения основного уравнения в физической области.

Идея м.ф.о. в гидродинамике такова [3]. Пусть в физической области  $D$  с границей  $S$  необходимо численно решить начально-краевую задачу для уравнений Навье несжимаемой жидкости

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] + \nabla p = \mu \Delta \mathbf{v} + \rho \mathbf{F}, \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \mathbf{v} \Big|_{t=0} = \mathbf{d}, \mathbf{v} \Big|_S = \Phi \quad (1)$$

С данной целью в м.ф.о. физическая область  $D$  расширяется присоединением *фиктивной произвольной* области  $D_\varepsilon$  со своей границей  $S_\varepsilon$ , в которой решается *искусственно* сформулированная задача [3] с нулевыми краевыми условиями для давления и компонент скорости:

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{v}_\varepsilon}{\partial t} + (\mathbf{v}_\varepsilon \cdot \nabla) \mathbf{v}_\varepsilon \right] + \nabla p_\varepsilon = \mu \Delta \mathbf{v}_\varepsilon + \rho \mathbf{F}_\varepsilon - \frac{\mathbf{v}_\varepsilon}{\varepsilon}, \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_\varepsilon = 0, \mathbf{v}_\varepsilon \Big|_{t=0} = \mathbf{d}_\varepsilon, \mathbf{v}_\varepsilon \cdot \boldsymbol{\tau} \Big|_{S_\varepsilon} = 0$$

Здесь особое внимание привлекает *дополнительный член*  $\frac{\mathbf{v}_\varepsilon}{\varepsilon}$  в системе (2), где стоящий в

знаменателе малый параметр стремится к нулю:  $\varepsilon \rightarrow 0!$

Казалось бы, одного вида уравнения (2) достаточно для того чтобы забраковать м.ф.о. Очевидно, что  $\varepsilon$  - уравнение (2) совершенно **не совпадает с уравнением Навье** (1) при малом параметре  $\varepsilon \rightarrow 0$ , но стремится к нему при противоположно большом значении параметра  $\varepsilon \rightarrow \infty$ . Сразу же возникают следующие вопросы.

**Вопрос 1.** Чему должно быть равно конкретное численное значение малого параметра (размерность  $[\varepsilon] = \text{кг}/(\text{м}^3 \text{с})$ )? Каковы критерии его выбора?

Он не может быть равным нулю. Если положить  $\varepsilon = 0$ , то *фиктивная* задача (2) переходит в тривиальное равенство

$$\mathbf{v}_\varepsilon = 0 \quad (3)$$

на всей *фиктивной* области  $D_\varepsilon$ , следовательно, не будет необходимости в начально-краевой  $\varepsilon$  - задаче (2). В то же время, очевидно, что продолжение решения исходной *действительной* задачи (1) в фиктивную область  $D_\varepsilon$  будет ненулевым

$$\mathbf{v} \Big|_{D_\varepsilon} \neq 0, \quad (4)$$

т.е. получается противоречие с (3).

**Вопрос 2.** Если  $\varepsilon \neq 0$ , то каким краевым условием должен обладать вектор скорости  $\mathbf{v} \Big|_{S_\varepsilon} = \Phi_\varepsilon$  на границе  $S_\varepsilon$ , т.е. как должен быть выбран вектор  $\Phi_\varepsilon$  для того чтобы решение *фиктивной*  $\varepsilon$  - задачи совпало с продолжением решения исходной физически *действительной* задачи (1)? При несовпадении решений задач (1) и (2) в области  $D_\varepsilon$  использование “м.ф.о.” в конечно-разностных методах с введением общей сеточной области **теряет смысл**. В дополнение к этим вопросам приведенных ниже контрпримеров будет достаточно, чтобы понять фальшивость “метода фиктивных областей”.

**Контрпример 1.** Рассмотрим проблему “м.ф.о.” с точки зрения второго закона Ньютона. Для этого уравнение динамики вязкой жидкости (1) запишем с помощью субстанциональной производной по времени

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \nabla p = \mu \Delta \mathbf{v} + \rho \mathbf{F}, \quad (5)$$

умножая это уравнение на элементарный объем  $\delta\tau$  приходим к формулировке второго закона Ньютона для массы  $\delta m = \rho \delta\tau$ :

$$\delta m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f}, \quad (6)$$

$\frac{d\mathbf{v}}{dt}$  - ускорение,  $\mathbf{f} = (-\nabla p + \mu \Delta \mathbf{v} + \rho \mathbf{F}) \delta\tau$  - главная сила.

Умножение на  $\delta\tau$  уравнения динамики в системе (2), по аналогии с выражением (6), дает второй закон Ньютона в виде

$$\delta m \frac{d\mathbf{v}_\varepsilon}{dt} = \mathbf{f}_\varepsilon - \frac{\mathbf{v}_\varepsilon}{\varepsilon} \delta\tau, \quad (7)$$

где последний член  $\frac{\mathbf{v}_\varepsilon}{\varepsilon} \delta\tau$  определяет реактивную силу трения, которая стремится к бесконечно большим значениям, так как  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Получается в силу (7), что в фиктивной области на частицы жидкости действуют бесконечно большие пропорциональные скорости силы, зависящие от малого параметра  $\varepsilon$ . Дело в том, что сила  $\mathbf{F}_{mp} = -k\mathbf{v}$  образует закон трения Ньютона [4-5] и переходит в уравнениях Навье в диссипативный член  $\mu \Delta \mathbf{v}$ .

**Контрпример 2.** Начнем с простейшего обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

$$y' = y, \quad y(0) = 1, \quad (8)$$

Условимся, что решение задачи Коши (1) ищется в *действительной* области  $0 \leq x < \infty$ . Точное тривиальное решение задачи (8) очевидно:

$$y(x) = e^x \quad (9)$$

Пусть область  $-\infty < x \leq 0$  согласно идее “м.ф.о.” будет *фиктивной* областью. По аналогии с (2) эта задача (8) стыкуется с  $\varepsilon$  - задачей

$$y'_\varepsilon = y_\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon} y_\varepsilon, \quad y_\varepsilon(0) = 1 \quad (10)$$

Решение задачи Коши (10) имеет вид

$$y_\varepsilon = e^{\frac{(1-1/\varepsilon)x}{\varepsilon}} \quad (11)$$

Заметим, что начальное условие  $y_\varepsilon(0) = 1$  в (10) выполняется решением (11) при любом  $\varepsilon \neq 0$ . При  $\varepsilon \rightarrow 0$  решение (11) в точке  $x=0$  будет иметь неопределенность в показателе степени

$$y_\varepsilon(0) = e^{\frac{0}{\varepsilon \rightarrow 0}} \quad (11')$$

Таким образом, в “м.ф.о.” возникает проблема постановки начальных условий при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

**Теорема 1.** При  $\varepsilon \rightarrow 0$  решение (11) фиктивной задачи Коши (10) может на сколь угодно большую величину отличаться от продолжения в фиктивную область действительного решения (9) исходной задачи (8).

*Доказательство.* Положим  $x = -b^2 \in (-\infty, 0], b \neq 0$ . Для данной произвольной точки из фиктивной области решение (11) “фиктивной” задачи равно

$$y_\varepsilon(-b^2) = e^{(1-\frac{1}{\varepsilon})x} = e^x e^{-\frac{x}{\varepsilon}} = e^{-b^2} e^{-\frac{(-b^2)}{\varepsilon}} = e^{-b^2} e^{\frac{b^2}{\varepsilon}} = y(-b^2) e^{\frac{b^2}{\varepsilon}}, \quad (12)$$

где  $y(-b^2)$  - продолжение действительного решения (9) в фиктивную область  $(-\infty, 0]$ . Составим отношение:

$$\frac{y_\varepsilon(-b^2)}{y(-b^2)} = e^{\frac{b^2}{\varepsilon}}, \quad (13)$$

по которому видно, что при  $\varepsilon \rightarrow 0$  решение (11)  $y_\varepsilon(-b^2)$  отличается от продолжения точного решения (9)  $y(-b^2)$  в фиктивную область на сколь угодно большую величину, т.к.  $e^{\frac{b^2}{\varepsilon}} \rightarrow \infty$  стремится к бесконечности,

Рассмотрим их разность в действительной области.

Пусть  $x = b^2 \in [0, \infty), b \neq 0$ .

Тогда из равенств

$$y_\varepsilon(b^2) = e^{(1-\frac{1}{\varepsilon})x} = e^x e^{-\frac{x}{\varepsilon}} = e^{b^2} e^{-\frac{b^2}{\varepsilon}} = y(b^2) e^{-\frac{b^2}{\varepsilon}}$$

вытекает, что и в действительной области различие между решениями (9) и (11) при  $\varepsilon \rightarrow 0$  становится сколь угодно большим, ибо  $e^{-\frac{b^2}{\varepsilon}} \rightarrow 0$  и фиктивное решение стремится к нулю  $y_\varepsilon(b^2) \rightarrow 0$ , в то время как действительное решение отлично от нуля  $y(b^2) \neq 0$ . В данном примере решение (9) исходной задача Коши (8) так и решение (11) задачи “м.ф.о.” (10) точно удовлетворяют начальному условию  $y_\varepsilon(0) = 1, y(0) = 1$ .

**Контрпример 3.** Рассмотрим другой пример неоднородного уравнения

$$y' = y + 1, \quad y(0) = 0, \quad (14)$$

точное решение которого есть

$$y(x) = e^x - 1 \quad (15)$$

Условимся, что решение задачи Коши (14) ищется в *действительной* области  $0 \leq x < \infty$ . Пусть отрицательная область  $-\infty < x \leq 0$  согласно м.ф.о. будет *фиктивной* областью. По аналогии с (2) эта задача (14) стыкуется с  $\varepsilon$ -задачей

$$y'_\varepsilon = y_\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon} y_\varepsilon + 1, \quad y_\varepsilon(0) = 0 \quad (16)$$

Решение задачи Коши (16) имеет вид

$$y_\varepsilon = e^{(1-\frac{1}{\varepsilon})x} - 1/(1-\frac{1}{\varepsilon}) \quad (17)$$

Решение фиктивной задачи (17) приближенно удовлетворяет начальному условию для  $\varepsilon \neq 0$

$$y_\varepsilon(0) = 1 - 1/(1-\frac{1}{\varepsilon}) \quad (18)$$



При  $\varepsilon \rightarrow 0$ , аналогично (11'), возникает неопределенность в показателе степени

$$y_\varepsilon(0) = e^{-\frac{0}{\varepsilon \rightarrow 0}} - 1 / \left(1 - \frac{1}{\varepsilon \rightarrow 0}\right) \quad (18') \quad \text{Положим } x = -b^2 \in (-\infty, 0]. \text{ Решение (17) в}$$

данной точке равно

$$\begin{aligned} y_\varepsilon(-b^2) &= e^{-b^2} e^{\frac{b^2}{\varepsilon}} - 1 / \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) = (e^{-b^2} - 1) e^{\frac{b^2}{\varepsilon}} + e^{\frac{b^2}{\varepsilon}} - 1 / \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) = \\ &= y(-b^2) e^{\frac{b^2}{\varepsilon}} + e^{\frac{b^2}{\varepsilon}} - 1 / \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right), \end{aligned} \quad (19)$$

здесь  $y(-b^2)$  есть продолжение в фиктивную область действительного решения (15). Из (19) видна бесконечно большая разность при  $\varepsilon \rightarrow 0$  между фиктивным решением  $y_\varepsilon(-b^2)$  и действительным решением (15)  $y(-b^2)$ .

В контрпримерах 2 и 3 показано, что решения м.ф.о. при  $\varepsilon \rightarrow 0$  могут отличаться на сколь угодно большую величину от продолжения в фиктивную область действительного решения в силу (13) и (19), а ведь именно эти решения в фиктивной области используются в сеточных методах в качестве дополнительных условий для исходной задачи в действительной области.

**Контрпример 4.** Покажем несостоятельность "м.ф.о." на течении вязкой несжимаемой жидкости в канале с параллельными стенками (течение Пуазейля), то есть для краевой задачи. Для данного течения из уравнений Навье следует:

$$\mu \frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{dp}{dx} \quad (20)$$

Точное решение данного уравнения:

$$u = -\frac{1}{2\mu} \cdot \frac{dp}{dx} (b^2 - y^2), \quad \frac{dp}{dx} = const < 0, \quad (21)$$

$$u(b) = u(-b) = 0 \quad (22)$$

В фиктивной области  $D_\varepsilon$  по "м.ф.о." решается  $\mathcal{E}$  - уравнение

$$\frac{dp}{dx} = \mu \frac{d^2 u_\varepsilon}{dy^2} - \frac{1}{\varepsilon} u_\varepsilon, \quad (23)$$

Точное решение уравнения (23) в физической области  $D$  при краевых условиях (22):

$$u_\varepsilon = -\varepsilon \cdot \frac{dp}{dx} \left\{ 1 - \frac{e^{\frac{(\frac{1}{\varepsilon\mu})^{\frac{1}{2}} \cdot y} - y(\frac{1}{\varepsilon\mu})^{\frac{1}{2}}} + e^{-y(\frac{1}{\varepsilon\mu})^{\frac{1}{2}}}}{e^{\frac{b(\frac{1}{\varepsilon\mu})^{\frac{1}{2}}} + e^{-b(\frac{1}{\varepsilon\mu})^{\frac{1}{2}}}} \right\} \quad (24)$$

Разность решений между (22) и (24)

$$|u(y) - u_\varepsilon(y)| = -\frac{dp}{dx} \left| \frac{1}{2\mu} (b^2 - y^2) + \varepsilon \left( 1 - \frac{e^{\frac{y(\frac{1}{\varepsilon\mu})^{\frac{1}{2}}}} + e^{-\frac{y(\frac{1}{\varepsilon\mu})^{\frac{1}{2}}}}}{e^{\frac{b(\frac{1}{\varepsilon\mu})^{\frac{1}{2}}} + e^{-\frac{b(\frac{1}{\varepsilon\mu})^{\frac{1}{2}}}}} \right) \right| \quad (25)$$

показывает, что  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |u(y) - u_\varepsilon(y)| \neq 0$ , то есть при  $\varepsilon \rightarrow 0$

фиктивное решение  $u_\varepsilon(y)$  не стремится к действительному решению  $u(y)$ . Теперь рассмотрим решение уравнения (23) в фиктивной области  $D_\varepsilon$ . Согласно м.ф.о. (2) на границе  $S_\varepsilon$  фиктивной области  $D_\varepsilon$  ставится однородное краевое условие  $u_\varepsilon(-y_H) = 0$ , кроме этого на границе физической области дано  $u_\varepsilon(-b) = 0$ . Для данных краевых условий точное решение уравнения (23) в фиктивной области имеет следующий вид:

$$u_\varepsilon = -\varepsilon \cdot \frac{dp}{dx} \left[ 1 - \frac{e^{\frac{(\frac{1}{\varepsilon\mu})^{\frac{1}{2}} \cdot (y + \frac{b}{2} + \frac{y_H}{2})}} + e^{-\frac{(y + \frac{b}{2} + \frac{y_H}{2}) \cdot (\frac{1}{\varepsilon\mu})^{\frac{1}{2}}}}}{e^{\frac{(\frac{y_H}{2} - \frac{b}{2}) \cdot (\frac{1}{\varepsilon\mu})^{\frac{1}{2}}} + e^{-\frac{(y_H - \frac{b}{2}) \cdot (\frac{1}{\varepsilon\mu})^{\frac{1}{2}}}}} \right] \quad (26)$$

Аналогично (25) разность решений (21) и (26) в фиктивной области  $D_\varepsilon$  не стремится к нулю при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Отсюда следует вывод, что решение (26) в фиктивной области не сходится к решению уравнения Навье (21), поэтому в нефизической фиктивной области  $D_\varepsilon$  не должно применяться  $\varepsilon$  – уравнение.

Очевидный факт, точное решение уравнения Навье (21) на границе

“ $-y_H$ ”  $\in S_\varepsilon$  фиктивной области не равно нулю

$$u(-y_H) = -\frac{1}{2\mu} \cdot \frac{dp}{dx} (b^2 - y_H^2) \neq 0, \quad (27)$$

поэтому однородное краевое условие  $u_\varepsilon(-y_H) = 0$  м.ф.о. (2) полностью противоречит точному решению (21), согласно которому  $u(-y_H) \neq 0$ , что видно из рисунка. Итак, в данном примере решение (26) в фиктивной области  $D_\varepsilon$  на сколь угодно большую величину отличается от продолжения решения (21) в эту область, поэтому указанное неравенство граничных значений

$$u_\varepsilon(-y_H) = 0, u(-y_H) \neq 0, u_\varepsilon(-y_H) \neq u(-y_H) \quad (28)$$

доказывает бессмысленность применения м.ф.о. (2) в задачах гидродинамики.

На данном гидродинамическом **контрпримере 4** убедительно показана проблема постановки адекватных продолжению в фиктивную (заграничную) область решению (27) граничных условий для фиктивной задачи (23), потому что однородное краевое условие  $u_\varepsilon(-y_H) = 0$  “м.ф.о.” (2) оказалось ошибочным. В данном примере рассмотрена простейшая область, причем здесь известно классическое аналитическое решение (21) действительной задачи, благодаря чему известно точное краевое условие (27).

При решении пространственных задач, где заранее не известно аналитическое решение типа (21), сложность, откровенно говоря, *неразрешимость* проблемы постановки граничных условий на фиктивной границе  $S_\varepsilon$ , не совпадающей с действительной границей  $S$ , в пространственных задачах гидродинамики неоспоримо очевидна.

Данные контрпримеры есть доказательство того, что верна

**Теорема 2.** При  $\varepsilon \rightarrow 0$  решение фиктивной задачи в фиктивной области не будет совпадать с продолжением решения в фиктивную область действительной задачи.

Основная цель “м.ф.о.” заключается в использовании решения фиктивной задачи в фиктивной области как дополнительных краевых условий в сеточных методах решения исходной основной задачи. Контрпримеры и теорема доказывают ошибочность и непригодность “м.ф.о.” к решению уравнений гидродинамики в нестандартных областях.

**Теорема 3.** При  $\varepsilon \rightarrow \infty$  решение фиктивной задачи

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{v}_\varepsilon}{\partial t} + (\mathbf{v}_\varepsilon \cdot \nabla) \mathbf{v}_\varepsilon \right] + \nabla p_\varepsilon = \mu \Delta \mathbf{v}_\varepsilon + \rho \mathbf{F}_\varepsilon - \frac{\mathbf{v}_\varepsilon - \Phi}{\varepsilon},$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_\varepsilon = 0, \mathbf{v}_\varepsilon \Big|_{t=0} = \mathbf{d}_\varepsilon, \mathbf{v}_\varepsilon \Big|_{S_\varepsilon} = \Phi_\varepsilon$$

в фиктивной области не будет совпадать с продолжением решения в фиктивную область действительной задачи:

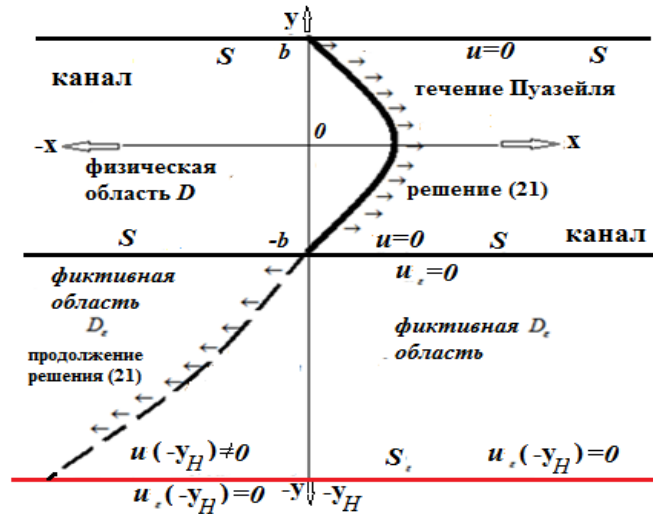
$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] + \nabla p = \mu \Delta \mathbf{v} + \rho \mathbf{F}, \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \mathbf{v} \Big|_{t=0} = \mathbf{d}, \mathbf{v} \Big|_S = \Phi$$

Доказательство теоремы опирается на предыдущие результаты и на здравый смысл, заключающийся в *абсолютной невозможности* поставить такие начальное и граничное условия

$$\mathbf{v}_\varepsilon \Big|_{t=0} = \mathbf{d}_\varepsilon, \mathbf{v}_\varepsilon \Big|_{S_\varepsilon} = \Phi_\varepsilon$$

в фиктивной задаче, при которых решение фиктивной задачи точно совпало бы с продолжением в фиктивную область решения исходной действительной задачи (см. (28)). Понятно, что если не будет требуемого точного совпадения, то решение фиктивной задачи, привлеченное как дополнительное условие, **сфальшивит решение** действительной задачи, что неприемлемо.

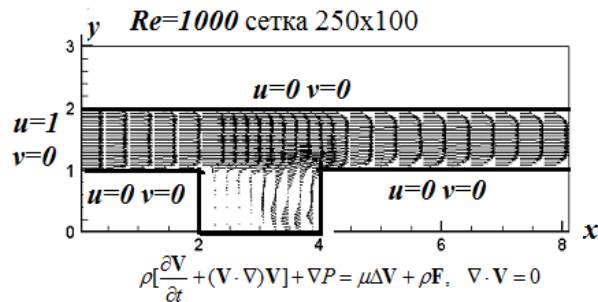
**Предложение.** В задачах о течениях в областях с твердой криволинейной границей более приемлемым является экстраполирование на узлы сетки в фиктивной области значений, полученных в узлах действительной области, причем для экстраполирования можно применять алгоритмы *сплайн-функций*, а давление должно вычисляться из уравнения неразрывности [4-5]. Это гораздо проще и экономичнее, чем решение в фиктивной области громоздкой, не соответствующей законам физики, системы надуманных уравнений с необоснованными начальными-краевыми условиями.



Фальшивость метода фиктивной области в гидродинамике убедительно подтверждена следующими расчетами течения вязкой несжимаемой жидкости в канале с внутренним уступом. Рассмотрены 2 типа фиктивной области: узкая и широкая, в силу искусственности и произвольности образования фиктивных областей.

### Течение в канале с уступом

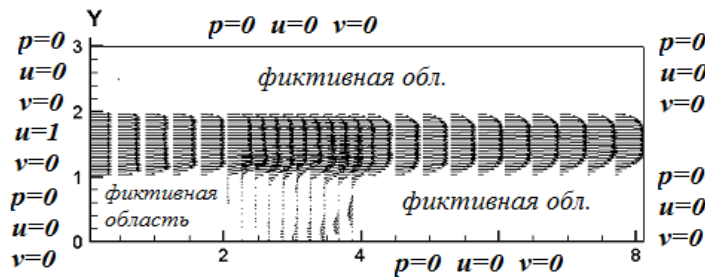
#### 1°. Узкая фиктивная область



Фиг. 1

Фиг. 1 представляет поле вектора скорости, рассчитанное непосредственно в физической области. Фиг. 2 представляет поле вектора скорости, рассчитанное по м.ф.о. . К физической области течения присоединяется фиктивная область, на границе которой давление и компоненты скорости равны нулю. На фиг. 3 линии тока в физической области с образованием кругового течения в уступе. На фиг. 4 линии тока, полученные по методу фиктивной области.

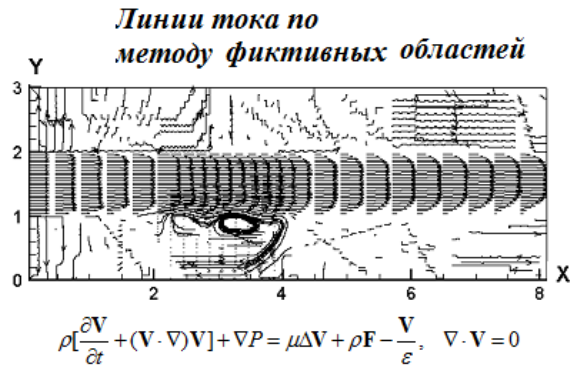
$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} \right] + \nabla P = \mu \Delta \mathbf{V} + \rho \mathbf{F} - \frac{\mathbf{V}}{\varepsilon}, \quad \nabla \cdot \mathbf{V} = 0$$



Фигура 2

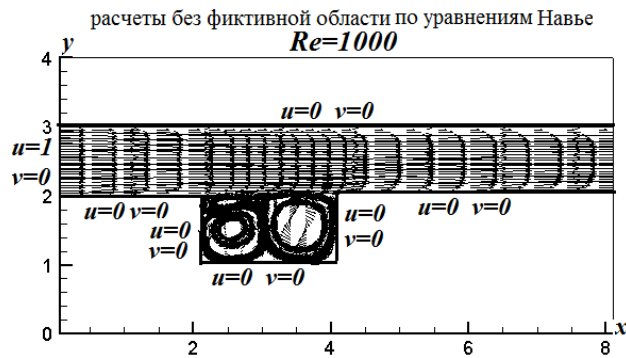


Фигура 3

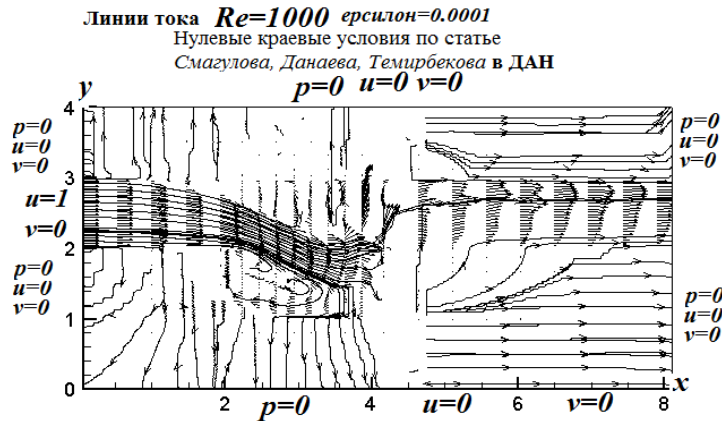


Фигура 4

**2°. Широкая фиктивная область**



Фигура 5



Фигура 6

Различия между результатами фиг. 1, 2, 3, 4, 5, 6 поразительные, что подтверждает справедливость вышеизложенных теорем и фальшивость м.ф.о. Линии тока по методу фиктивных областей на фиг. 4 и 6 противоречат действительным линиям тока на фиг. 3 и 5.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Саульев В.К. Интегрирование уравнений параболического типа методом сеток. – М.: Физмат-из, 1960г.С.243.
- [2] Вабищевич П.Н. Метод фиктивных областей в задачах математической физики. – М.: Изд-во МГУ, 1991г.С.156.
- [3] Смагулов Ш., Данаев Н.Т., Темирбеков Н.М. Моделирование краевых условий для давления и полного напора в задачах гидродинамики с помощью метода фиктивных областей// ДАН, 2000г., том 374, № 3, с. 333-335.
- [4] Jakupov K.B. RHEOLOGICAL LAWS OF VISCOUS FLUID DYNAMICS // Известия НАН РК, сер.физ.-мат., 1(293), январь-февраль 2014г.с.51-55.
- [5] Джакупов К.Б. Коррекции теоретических парадоксов механики сплошной среды.-А: Типография «Гылым Ордасы», 2016г. 431с
- [6] Орунханов М.К. Докторская диссертация. – Алматы: КазНУ им.Аль-Фараби, 2000г.
- [7] Джакупов К.Б. Моделирование термобародиффузий с химическими реакциями в жидкостях и газах // Известия НАН РК, серия физ.-мат., 6(310), ноябрь-декабрь. 2016 г.с.80-88.
- [8] Джакупов К.Б. О  $k - \varepsilon$ , LES, Рейнольдси и степенных моделях // Известия НАН РК, серия физ.-мат.,1(311) январь-февраль 2017 г.с.144-159.
- [9] Jakupov K.B. About gipotese of Stokes and rheological laws. -Almaty "Gylym Ordasy", P.172.
- [10] U.Piomelli. Large-eddy simulation: achievements and challengs // Progress in Aerospace Sciences 35 (1999) 335-362.
- [11] Spalart P. R.: Strategies for turbulence modelling and simulations, Int.J. Heat Fluid Flow, 21, pp. 2, (2000).
- [12] Strelets, M.: Detached Eddy Simulation of massively separated flows. AIAA Paper 2001-879, (2001).
- [13] Menter, F.R., Egorov, Y, (2010): The Scale-Adaptive Simulation Method for Unsteady Turbulent Flow Predictions. Part 1: Theory and Model Description, J. Flow Turbulence and Combustion, Vol. 85, No. 1
- [14] Egorov, Y, Menter, F.R. and Cokljat D.: Scale-Adaptive Simulation Method for Unsteady Flow Predictions. Part 2: Application to Aerodynamic Flows, companion paper, J. Flow Turbulence and Combustion, Vol. 85, No. 1.
- [15] Rotta J. C.: *Turbulente Strömungen*. BG Teubner Stuttgart, (1972).

#### REFERENCES

- [1] Sauliev V.K. Integration of parabolic equations by the grid method. - Moscow: Fizmat-out, **1960**. P.243.
- [2] Vabishchevich PN Method of fictitious domains in problems of mathematical physics. - Moscow: Izd-vo MGU, **1991**. P.156.
- [3] Smagulov Sh., Danaev NT, Temirbekov NM Simulation of boundary conditions for Pressure and total pressure in problems of hydrodynamics using the method of fictitious Regions // DAN, **2000**, volume 374, No. 3, p. 333-335.
- [4] Jakupov K.B. RHEOLOGICAL LAWS OF VISCOUS FLUID DYNAMICS // Proceedings of the NAS of RK, ser.fiz.-mat., 1 (293), January-February **2014** g.s.51-55.
- [5] Dzhakupov K.B. Corrections of theoretical paradoxes of continuum mechanics. -A: Printing house «Kylim Ordasy», **2016**g. 431с.
- [6] Orunkhanov M.K. Doctoral dissertation. - Almaty: KazNU named after Al-Farabi, **2000**.
- [7] Dzhakupov K.B. Modeling of thermobarodiffusion with chemical reactions in Fluids and gases // Izvestiya NAS RK, series of Physics and Mathematics, 6 (310), November-December **2016** g.80-88.
- [8] Dzhakupov K.B. About, LES, Reynoldsi and power models // Izvestiya NAS RK, series of Physics and Mathematics, 1 (311) January-February **2017**, p.144-159.
- [9] Jakupov K.B. About gipotese of Stokes and rheological laws. – Almaty: "Gylym Ordasy", P.172.
- [10] U.Piomelli. Large-eddy simulation: achievements and challengs // Progress in Aerospace Sciences 35 (**1999**) 335-362.
- [11] Spalart P. R.: Strategies for turbulence modelling and simulations, Int.J. Heat Fluid Flow, 21, pp. 2, (**2000**).
- [12] Strelets, M.: Detached Eddy Simulation of massively separated flows. AIAA Paper 2001-879, (**2001**).
- [13] Menter, F.R., Egorov, Y, (**2010**): The Scale-Adaptive Simulation Method for Unsteady Turbulent Flow Predictions. Part 1: Theory and Model Description, J. Flow Turbulence and Combustion, Vol. 85, No. 1
- [14] Egorov, Y, Menter, F.R. and Cokljat D.: Scale-Adaptive Simulation Method for Unsteady Flow Predictions. Part 2: Application to Aerodynamic Flows, companion paper, J. Flow Turbulence and Combustion, Vol. 85, No. 1.
- [15] Rotta J. C.: *Turbulente Strömungen*. BG Teubner Stuttgart, (**1972**).

---

**К. Б. Жақып-тегі**

ҚР БҒМ Математика және математикалық моделдеу институты, Алматы, Қазақстан

**ОЙДАН ШЫҒАРЫЛҒАН АЙМАҚТАР ӘДІСТЕМЕСІНІҢ  
ГИДРОДИНАМИКАДАҒЫ РЕПРЕЗЕНТАТТЫҒЫ**

**Аннотация.** Қолдан жасалған, бөлшектің астында тұрған және нөлге ұмтылған уақ параметрлі, қозғалыс теңдеулерінің жүйесін ойдан шығарылған аймақта қолдану тұтқырлы сығылмайтын сұйықтықтардың ағыстарын сандық есептеу мәселесінде ойдан шығарылған аймақтар әдістемесінің репрезентаттығы туралы сұрақ қарастырылған. Уақ параметрдің шешімнің шектелуіне әсерлігі сызықты дифференциал теңдеулерінің бір қатар үлгілеріне зерттелген. Бастау және шеттік сәйкес шарттарды ойдан шығарылған аймақта дұрыстап қою мәселесі өрнектелен. Манағы уақ параметр нөлге ұмтылған да шешімнің шектелмейтінін теориялық көрсету үшін уақ параметрлі дифференциал теңдеулерінің нағыз үлгілері келтірілген. Ішінде шұқыры бар жырақадағы тұтқырлы сығылмайтын сұйықтың ағысын сандық есептеу ойдан шығарылған аймақтар әдістемесін тіке және болжатпай жалғандығын көрсеткен.

**Тірек сөздер:** теңдеулер, жалған, аймақ, параметр, репрезентат.

**Сведения об авторе:**

Джакупов Кенес Баженович - доктор физико-математических наук, профессор, академик РАН, РГП Институт математики и математического моделирования КМ МОН РК, 050010, ул.Пушкина,125, г.Алматы, Казахстан

Домашний адрес:

050014, мкр. Айнабулак-3, д.158, кв. 20, г.Алматы, Казахстан

Контактные телефоны: 8 727 305 92 44, +7 701 667 88 59

Адрес электронной почты: E-mail: [jakupovKB@mail.ru](mailto:jakupovKB@mail.ru)

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 6, Number 316 (2017), 96 – 107

UDC 517.94

E. Musrepova, A.N. Zhidebaeva, A.Sh. Shaldanbaev

South Kazakhstan Pedagogical University, Shymkent  
[zhanat.dauletbeckyzi@mail.ru](mailto:zhanat.dauletbeckyzi@mail.ru) [shaldanbaev51@mail.ru](mailto:shaldanbaev51@mail.ru)

**ON OPERATOR METHODS FOR SOLVING A SINGULARLY  
PERTURBED CAUCHY PROBLEM FOR AN ORDINARY  
DIFFERENTIAL EQUATION OF THE FIRST ORDER WITH A  
VARIABLE COEFFICIENT**

**Abstract.** In this paper, we obtain a spectral decomposition of the solution of the Cauchy problem in a space with an indefinite metric, and with this decomposition a boundary layer expansion of the solution of a singularly perturbed Cauchy problem is derived, for a model equation of the first order  $\varepsilon y' + a(x)y(x) = f(x), y(0) = 0, a(x) > 0, f(x) \in W_2^n[0,1], a(x) \in C^n[0,1]$ .

**Keywords:** completely continuous operator, Hilbert-Schmidt's theorem, selfadjoint operator, Volterian operators, indefinite metric, Schmidt decomposition, completeness, orthonormal basis.

УДК 517.94

Э. Мусрепова, А.Н. Жидебаева, А.Ш. Шалданбаев

Оңтүстік Қазақстан педагогикалық университеті, Шымкент қ-сы

**СИНГУЛЯР ӘСЕРЛЕНГЕН, БІРІНШІ РЕТТІ ТЕҢДЕУДІҢ,  
КОШИЛІК ЕСЕБІН ШЕШУДІҢ ОПЕРАТОРЛЫҚ ӘДІСТЕРІ**

**1. Кіріспе**

Егер  $f(x) \in L^2(0,1)$ , ал  $a(x)$ -дегеніміз,  $[0,1]$  кесіндісі бойында үздіксіз нақты функция болса, онда, мына,

$$L_\varepsilon y = \varepsilon y'(x) + a(x)y(x) = f(x), x \in (0,1); \quad (1)$$

$$y(0) = 0 \quad (2)$$

Коши есебінің шешімі  $\varepsilon \rightarrow +0$  сәтінде қайда ұмтылады, жалпы бұл үшін  $a(x)$  функциясы қандай болуы керек?

Бұл есепті шешудің көптеген әдістері бар [1-9], өкінішке орай, бұл әдістердің көпшілігі жартылай эмпиристік әдістер қатарына жатады, себебі, есептің қалдық мүшесі, оның коэффициенттері арқылы бағаланбаған. Біз бұл есепті операторлық әдіспен [10-17] шешіп, әлгі олқылықты толтырмақпыз.

**2. Зерттеу әдістері**

**Анықтама 1.** Егер Гилберттің  $H$  кеңістігінің әрбір  $x \in H$  элементін, былайша,

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k$$



етіп,  $H$  кеңістігінде жинақталатын қатарға бірмәнді таратуға болса, онда  $\{e_k\}, k = 1, 2, \dots$  элементтер системасын осы  $H$  кеңістігінің базисі дейміз. Бірмәнділік дегеніміз әрбір  $x$  элементіне тек бір ғана  $\{x_k\}, k = 1, 2, \dots$  коэффициенттер тізбегі сәйкес келеді дегенді білдіреді.

**Анықтама 2.** Егер барлық  $x, y \in D(A)$  элементтері үшін, мына,  $(Ax, y) = (x, Ay)$  теңдігі орындалса онда бұл операторды эрмиттік дейміз.

**Теорема 1.** Әсіре үзіксіз эрмиттік оператордың спектрі тек меншікті мәндерден тұрады, олардың әрбірі санеселі, және оларға  $\lambda = 0$  нүктесі ғана шектік нүкте бола алады. Керісінше, осындай қасиетке ие, эрмиттік оператор әсіре үзіксіз.

**Теорема 2.** Егер  $A$ —дегеніміз Гилберттің  $H$  кеңістігіндегі әсіре үзіксіз әрі жалқы оператор болса, онда әрбір  $x \in H$  үшін  $Ax$  элементі осы  $H$  кеңістігінде жыйнақталатын,  $A$  операторының ортанормаланған меншікті векторларынан құралған, Фурьенің қатарына жіктеледі, яғни

$$Ax = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (x, \varphi_k) \cdot \varphi_k,$$

мұндағы  $\lambda_k$  - дегеніміз  $A$  операторының меншікті мәндері, ал  $\varphi_k$  - меншікті векторлары.

Осы теоремадан екі салдар шығады.

**Салдар 1.** Егер әсіре үзіксіз әрі жалқы  $A$  операторы қайтымды болса, онда оның меншікті векторларынан  $H$  кеңістігінің базисін құрауға болады

**Салдар 2.** Егер  $A$  операторы Гилберттің сеперабелді  $H$  кеңістігінде әсіре үзіксіз әрі жалқы болса, онда бұл кеңістікте  $A$  операторының меншікті векторларынан құралған ортанормаланған базис бар.

**Анықтама 3.** Егер, мына,

$$\int_a^b \int_a^b |k(s, t)|^2 ds dt < \infty$$

шарт орындалса, онда  $a < s, t < b$  жыйынында анықталған  $K(x, t)$  функциясын Гилберт пен Шмидтің ядросы дейміз, айтпақшы, мұндағы  $a$  мен  $b$  шамалы-да, бейшамалы-да болуы мүмкін.

**Теорема 3.** Егер  $K(s, t)$ - Гилберт пен Шмидтің ядросы болса, онда  $t(x) \in L^2(a, b)$  функциясына, мына,  $g(s) = \int_a^b K(s, t) f(t) dt$  функцияны сәйкестендіретін интегралдық оператор  $L^2(a, b)$  кеңістігінде әсіре үзіксіз.

**Лемма 1.** Егер кез келген  $x \in [0, 1]$  үшін

$$(a) \quad a(x) = a(1-x); \quad a(x) \in C[0, 1]$$

$$(б) \quad Su(x) = u(1-x)$$

болса, онда  $SL_\varepsilon$  - операторы  $L^2(0, 1)$  кеңістігінде симметриялы.

**Дәлелі.** Мына,  $u(x)$  және  $v(x)$  функциялары  $L_\varepsilon$  операторының  $D(L_\varepsilon)$  аймағында жатсын делік, яғни  $u(x) \in D(L_\varepsilon)$  және  $v(x) \in D(L_\varepsilon)$ ;

$$D(L_\varepsilon) = \{y(x) \in C^1(0, 1] \cap C[0, 1]; y(0) = 0\}.$$

Онда, төмендегі, формулалар орынды.

$$(SL_\varepsilon u, v) = \int_0^1 L_\varepsilon u S v dx = \int_0^1 [\varepsilon u' + a(x) u(x)] v(1-x) dx = \varepsilon \int_0^1 v(1-x) du + \int_0^1 d(x) u(x) v(1-x) dx = \varepsilon v(1-x)$$

$$u(x) \int_0^1 + \varepsilon - \int_0^1 u(x) v'(1-x) dx + \int_0^1 u(x) a(x) v(1-x) dx = |a(x) = a(1-x)| =$$

$$\varepsilon(u, S \frac{d}{dx} v) + (u, Sav) = (u, \varepsilon S \frac{d}{dx} v + Sav) = (u, SL_\varepsilon v),$$

мұндағы  $(\cdot, \cdot)$  - дегеніміз  $L^2(a, b)$  кеңістігіндегі скаляр көбейтінді.

**Лемма 2.** Егер нақты, үзіксіз  $a(x)$  - функциясы, мына,

$$a(x) \geq \alpha > 0, \forall x \in [0, 1]$$

шартты қанағаттандырса, онда кез келген  $u(x) \in D(L_\varepsilon)$  функциясы үшін, мынадай,

$$\|SL_\varepsilon u\| \geq \alpha \cdot \|u\| \quad (3)$$

алғыбаға орынды мұндағы  $(-)$  - дегеніміз қабындыру амалын білдіреді.

**Дәлелі.** Жоғарыдағы (1) теңдеудің екі жағын-да скаляр  $u(x) \in D(L_\varepsilon)$  функциясына көбейтсек, мына,  $(L_\varepsilon u, u) - \varepsilon \cdot (u', u) + (au, u) = (f, u)$  теңдікті аламыз, мұнан

$$\varepsilon(u', u) = \varepsilon \cdot \int_0^1 u' u dx = \varepsilon \int_0^1 u du = \varepsilon \cdot \frac{u^2(x)}{2} \Big|_0^1 = \frac{\varepsilon u^2(1)}{2} \geq 0;$$

мұнан,

$$(au, u) \leq (f, u) \leq \|f\| \cdot \|u\|.$$

Жоруымыз бойынша  $a(x) \geq \alpha > 0$  болғандықтан, соңғы теңсіздіктен

$$\alpha \cdot \|u\|^2 \leq (au, u) \leq \|f\| \cdot \|u\| \Rightarrow \alpha \cdot \|u\| \leq \|f\| = \|L_\varepsilon u\|.$$

$S$  - унитар оператор болғандықтан, мына,  $\|SL_\varepsilon u\| = \|L_\varepsilon u\|$  теңдік орынды, сондықтан  $\|SL_\varepsilon u\| \geq \alpha \cdot \|u\|$ . (4)

Егер  $y(x) \in \overline{D(SL_\varepsilon)}$  болса, онда  $y(x) \in D(SL_\varepsilon)$  тізбегі табылып, мына,  $y_n(x) \rightarrow y(x), SL_\varepsilon y_n \rightarrow SL_\varepsilon y$  шектік шарттар орындалады. Енді, мына, (4)

$$\|SL_\varepsilon y_n\| \geq \alpha \|y_n\|$$

теңсіздікте  $\wedge \rightarrow \infty$  деп шекке көшсек, онда (3) теңсіздігін аламыз, яғни лемманың тұжырымын.

**Салдар 3.**

(а) Кері  $(SL_\varepsilon)^{-1}$  операторы бар;

(б)  $\overline{SL_\varepsilon}$  операторының мәндерінің жыйыны тұйық, яғни  $R(\overline{SL_\varepsilon}) = R(SL_\varepsilon)$ .

Шынында-да, егер  $y \in \overline{R(SL_\varepsilon)}$  болса, онда  $\{y_n\} \in R(SL_\varepsilon)$  тізбегі табылып  $y_n \rightarrow y$  болар еді, яғни  $y_n = \overline{SL_\varepsilon} x_n \rightarrow y$ . Онда алғыбаға бойынша  $\|x_n - x_m\| \leq \|y_n - y_m\| : \alpha$ , демек  $\{x_n\}$  - фундаменталді тізбек, сондықтан  $x \in H$  элементі табылып  $x_n \rightarrow x$  болады, мұнан  $x_n \rightarrow x$ ,

$y_n = \overline{SL_\varepsilon} x_n \rightarrow y$ . Біздің  $\overline{SL_\varepsilon}$  операторымыздың тұйық болғандығынан,  $x \in D(\overline{SL_\varepsilon})$  және  $y = (\overline{SL_\varepsilon})x$  болады, яғни  $y \in R(\overline{SL_\varepsilon})$ , бізге керегі-де осы еді.

**Лемма 3.**  $\overline{SL_\varepsilon}$  - операторының өзгеру аймағы, немесе мәндерінің жыйын бүткіл  $H = L^2(0,1)$  кеңістігі.

**Дәлелі.** Егер  $f(x)$  функциясы  $[0,1]$  кесіндісінде үзіксіз болса, онда, мына,

$$y(x, \varepsilon, f) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^x \frac{e(x)}{e(t)} f(t) dt = L_\varepsilon^{-1} f \quad (5)$$

функция (1) - (2) Коши есебінің бірегей шешімі, мұндағы  $e(x)$  - дегеніміз, сәйкес біртекті теңдеудің шешімі, яғни

$$\varepsilon \cdot e'(x) + e(x) = 0; e(0) = 1.$$

Шынында да, жоғарыдағы, (5) формуланы  $x$  бойынша дифференциалдасақ, онда

$$\begin{aligned} y'(x, \varepsilon, f) &= \frac{f(x)}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^x \frac{e'(x)}{e(t)} f(t) dt, \varepsilon y'(x, \varepsilon, f) = f(x) + \int_0^x \frac{e'(x)}{e(t)} f(t) dt = \\ &= f(x) - \int_0^x \frac{a(x)e(x)}{\varepsilon e(t)} f(t) dt = f(x) - \frac{a(x)}{\varepsilon} \int_0^x \frac{e(x)}{e(t)} f(t) dt = \\ &= f(x) - a(x) y(x, \varepsilon, f), \text{ мұнан, } \varepsilon y'(x, \varepsilon, f) + a(x) y(x, \varepsilon, f) = f(x) \end{aligned}$$

Жоғарғы (5) формулада

$x = 0$  десек, онда  $y(x, \varepsilon, f)|_{x=0} = 0$  боларын көреміз.

Алғыбағадан шешімнің бірегей екенін көреміз.

**Салдар 4.** Кезкелген  $g(x)$  - үзіксіз функциясы үшін, мына,

$SL_\varepsilon u(x) = g(x)$  операторлық теңдеудің тек бір ғана шешімі бар.

**Дәлелі.** Шынында-да,  $g(x)$  үзіксіз болғандықтан, мына  $Sg(x) = g(1-x)$  функциясы-да үзіксіз болады, ал, жоғарыда дәлелдегеніміз бойынша,  $L_\varepsilon u(x) = Sg(x)$  теңдеуінің тек бір ғана шешімі бар. Енді  $S$  операторымен осы теңдіктің екі жағына-да әсер етсек, онда  $SL_\varepsilon u = g$ .

Үзіксіз функциялардың сызықтық көпсаласы  $H = L^2(0,1)$  кеңістігінде тығыз орналасқан, сондықтан  $\overline{R(SL_\varepsilon)} = H$ , ал  $R(SL_\varepsilon) \subset R(\overline{SL_\varepsilon})$  болғандықтан  $\overline{R(SL_\varepsilon)} \subset \overline{R(\overline{SL_\varepsilon})} \subset H$ , демек  $\overline{R(\overline{SL_\varepsilon})} = H$ , сонымен 3 лемма дәлелденді.

**Теорема 4.** Егер нақты, үзіксіз  $a(x)$  функциясы  $[0,1]$  кесіндісінің кезкелген  $x \in [0,1]$  нүктесі үшін, төмендегі,

(а)  $a(x) = a(1-x)$ ;

(б)  $a(x) \geq \alpha > 0$ ;

шарттарды қанағаттандырса, онда

1)  $SL_\varepsilon$  операторының болмысы жалқы;

2)  $\overline{SL_\varepsilon}$  операторының қайтымы шектеулі, әрі, әсіре үзіксіз.

Дәлелі:

1)  $SL_\varepsilon$  – операторы симметриялы, яғни  $SL_E \subset (SL_E)^*$  мұндағы (\*) жұлдызша сыңар оператордың белгісі. Сыңар оператор әруақта тұйық, сондықтан  $\overline{SL_\varepsilon} \subset (\overline{SL_\varepsilon})^* = (SL_\varepsilon)^*$ . Жоғарыда, дәлелденген 3 лемма бойынша  $\overline{SL_\varepsilon}$  операторының мәндерінің жыйыны бүткіл  $H$  кеңістігі, сондықтан  $D(\overline{SL_\varepsilon}) = D(SL_\varepsilon)^* = D((\overline{SL_\varepsilon})^*)$ .

2) Кері  $(\overline{SL_\varepsilon})^{-1}$  операторының бар екенін біз жоғарыда көрсеткенбіз, сонымен бірге ол тұйық және 3 лемма бойынша бүткіл  $H$  кеңістігінде анықталған, демек Банахтың тұйық график туралы теоремасы бойынша шектеулі. Біз оның әсіре үзкіз екенін көрсетейік. Бұл қасиет (5) формула мен, мына,

$$0 \leq \frac{e(x)}{e(t)} = \exp \left\{ -\frac{1}{\varepsilon} \int_t^x a(s) ds \right\} \leq 1$$

теңсіздіктің салдары, себебі, мына

$$(\overline{SL_\varepsilon})^{-1} f(x) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^1 \theta(x-t) \frac{e(x)}{e(t)} f(t) dt$$

интегралдық оператор Гильберт-Шмидт класыныкі.

**Теорема 5.** Егер  $[0,1]$  кесіндісі бойында үзкіз нақты  $a(x)$  функциясы осы  $[0,1]$  кесіндісінің әрбір  $x$  нүктесінде, мына,

$$(a) a(x) = a(1-x); \forall x \in [0,1];$$

$$(б) a(x) \geq \alpha > 0; \forall x \in [0,1];$$

шарттарды қанағаттандырса, онда  $(\overline{SL_E})^{-1}$  операторының нормаланған векторлары  $H = L^2(0,1)$  кеңістігінде ортонормаланған базис құрайды.

Дәлелі: Жоғарыда, көрсеткеніміз бойынша  $\overline{SL_\varepsilon}$  - жалқы оператор, сондықтан,  $(\overline{SL_\varepsilon})^{-1}$  операторы-да  $H$  кеңістігінде жалқы, әрі, әсіре үзкіз. Жоғарыдағы, 1, 2 салдарлар бойынша,  $(\overline{SL_\varepsilon})^{-1}$  операторының нормаланған меншікті векторлары  $H$  кеңістігінде ортонормаланған базис құрайды.

**Салдар 5.** Мына,

$$\varepsilon \varphi'(x) + a(x)\varphi(x) = \lambda y(1-x), x \in (0,1] \varphi(0) = 0$$

спектралді есептің нормаланған меншікті векторлары  $L^2(0,1)$  кеңістігінде базис құрайды.

**Дәлелі.** Егер  $\varphi_n(x)$  - дегеніміз  $(\overline{SL_\varepsilon})^{-1}$  операторының меншікті функциясы, ал  $\lambda_n^{-1}$  – меншікті мәні болса, онда,мына,

$$(\overline{SL_\varepsilon})^{-1} \varphi_n(x) = \lambda_n^{-1} \varphi_n(x), n = 1, 2, \dots$$

теңдіктер орындалады, немесе

$$(\overline{L_\varepsilon})^{-1} S \varphi_n(x) = \lambda_n^{-1} \varphi_n(x), \lambda_n (\overline{L_\varepsilon})^{-1} \psi_n(x) = S \psi_n(x), \psi_n(x) = S \varphi_n(x)$$

Егер  $S \psi_n(x) \in L^2(0,1)$  болса, онда  $(\overline{L_\varepsilon})^{-1} \varphi_n$  функциясының  $L^2(0,1)$ -ге тиісті бірінші ретті жалпы туындысы бар, сондықтан оны абсолютті үзкіз деуімізге болады. Демек, жоғарыдағы теңдік бойынша,  $S \psi_n$  - абсолютті үзкіз функция, онда  $(\overline{L_\varepsilon})^{-1} \varphi_n$  үзкіз дифференциалданады және  $S \varphi_n(0) = 0$ , яғни  $S \varphi_n(x) \in D(L_E)$ . Енді  $\overline{L_\varepsilon}$  операторымен, мына,  $\lambda_n \overline{L_\varepsilon}^{-1} \psi_n = S \psi_n$  теңдіктің екі жағына-да әсер етсек, мынадай,

$$\lambda_n \psi_n = \overline{L_\varepsilon} S \psi_n = L_\varepsilon S \psi_n$$

$$L_E \varphi_n = \lambda_n S \varphi_n, S \psi_n(0) = \varphi_n(x)|_{x=0} = 0$$

$$\varepsilon \varphi_n'(x) + a(x)\varphi_n(x) = \lambda_n \varphi_n(1-x), n = 1, 2, \dots$$

### 3. Негізгі нәтижелер

**Теорема 6.** Егер  $[0,1]$  кесіндісі бойында үзіксіз әрі нақты  $a(x)$  функциясы, мына,

- 1)  $\forall x \in [0,1]$  үшін  $a(x) = a(1-x)$
- 2)  $\forall x \in [0,1]$  үшін  $a(x) \geq \alpha > 0$

шарттарға сай болса, онда Кошидің (1)-(2) есебінің кез келген  $f(x) \in L^2(0,1)$  үшін әлді шешімі бар және ол, мынадай,

$$y(x, \varepsilon, f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(Sf, \varphi_n)}{\lambda_n} \varphi_n(x)$$

мұндағы  $\lambda_n (n = 1, 2, \dots)$  - дегеніміз, мына

$$\varepsilon \varphi_n'(x) + a(x) \cdot \varphi_n(x) = \lambda_n \varphi_n(1-x), \varphi_n(0) = 0, n = 1, 2, \dots$$

спектрәлді есептің меншікті мәндері, ал  $\varphi_n$  - дегеніміз соларға сәйкес меншікті функциялар.

**Дәлелі.**  $S$  операторы мен (1) теңдіктің екі жағына-да әсер етеміз, сонда  $SL_\varepsilon y = Sf$  болады,  $SL_\varepsilon$  - операторы  $\overline{SL_\varepsilon}$  операторының таркезеңі сондықтан ол - да қайтымды, және, мына

$$\begin{aligned} y(x, \varepsilon, f) &= (SL_\varepsilon)^{-1} Sf = \sum_{n=1}^{\infty} ((SL_\varepsilon)^{-1}(Sf, \varphi_n) \cdot \varphi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (Sf, (SL_\varepsilon)^{-1} \varphi_n) \cdot \varphi_n(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (Sf, \frac{\varphi_n}{\lambda_n}) \varphi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(Sf, \varphi_n)}{\lambda_n} \varphi_n(x) \end{aligned}$$

**Теорема 7.** Егер  $e(x)$ -дегеніміз, сәйкес біртекті теңдеудің фундаменталды шешімі болса, яғни

$$\begin{aligned} \varepsilon e'(x) + a(x)e(x) &= 0, \\ e(0) &= 1, \end{aligned}$$

онда, мына,

$$e(x) = \varepsilon \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(1)}{\lambda_n} \varphi_n(x)$$

формула орындалады, мұндағы

$$\varepsilon \varphi_n'(x) + a(x) \varphi_n(x) = \lambda_n S \varphi_n(x)$$

$$\varphi_n(0) = 0$$

Дәлелі.  $Sae(x)$  функциясының Фүре коэффициенттерін есептейік:

$$\begin{aligned} (Sae, \varphi_n) &= \left( Sae, \frac{\lambda_n S \varphi_n - \varepsilon \varphi_n'}{a} \right) = (Se, \lambda_n S \varphi_n - \varepsilon \varphi_n') = (Se, \lambda_n S \varphi_n) - \varepsilon (Se, \varphi_n'); \\ (Se, \varphi_n') &= \int_0^1 Se \cdot d\varphi_n = Se \cdot \varphi_n(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 (Se)' - \varphi_n(x) dx = \\ &= \varphi_n(1) + \int_0^1 Se'(x) \varphi_n(x) dx = \varphi_n(1) + (Se', \varphi_n); \end{aligned}$$

Демек,

$$(Sae, \varphi_n) = \lambda_n (e, \varphi_n) - \varepsilon \varphi_n(1) - \varepsilon (Se', \varphi_n) = |-\varepsilon e' = ae| = \lambda_n (e, \varphi_n) - \varepsilon \varphi_n(1) + (Sae, \varphi_n), n=1, 2, \dots$$

мұнан,

$$\lambda_n(e, \varphi_n) = e - \varphi_n(1), \Rightarrow (e, \varphi_n) = \frac{\varepsilon \varphi_n(1)}{\lambda_n}, \Rightarrow e(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (e, \varphi_n) \varphi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon \varphi_n(1)}{\lambda_n} \varphi_n(x)$$

Теорема 8. Егер  $[0,1]$  кесіндісінде үзіксіз, нақты  $a(x)$ -функциясы, мына,

$$(a) \forall x \in [0,1] \text{ үшіна } a(1-x) = a(x)$$

$$(б) \forall x \in [0,1] \text{ үшін } a(x) \geq \alpha > 0$$

шарттарға сай болса, ал (1)-(2) Коши есебінің оң жағындағы бос мүшесі  $f(x) \in W_2^n[0,1]$  болса осы (1)-(2) Коши есебінің шешімінің асимптотикасы, былай,

$$y(x, e, f) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left[ \frac{J^k f(x)}{a(x)} - \frac{J^k f(0)}{a(0)} e(x) \right] \varepsilon^k + (-1)^n \varepsilon^n L_\varepsilon^{-1} J^n f(x)$$

таратылады, мұндағы  $J^0 = I, Jf(x) = \frac{d}{d(x)} \frac{f(x)}{a(x)}$

$$\varepsilon e'(x) + a(x)e(x) = 0, e(0) = 1$$

$$\| L_\varepsilon^{-1} J^n f(x) \| \leq \frac{\| J^n f(x) \|}{\alpha} \quad (6)$$

Дәлелі.  $Sf(x) = f(1-x)$  функциясының Фүре коэффициенттерін есептейік:

$$\begin{aligned} (Sf, \varphi_n) &= | \varepsilon \varphi_n' + a(x) \varphi_n = \lambda_n S \varphi_n | = \left( Sf, \lambda_n \frac{S \varphi_n}{a} - \frac{\varepsilon}{a} \varphi_n' \right) = \lambda_n \left( Sf, \frac{S \varphi_n}{a} \right) - \varepsilon \left( Sf, \frac{\varphi_n'}{a} \right) \\ &= | Sa = a(1-x) = a(x) | = \lambda_n \left( S \frac{f}{a}, S \varphi_n \right) - \varepsilon \left( S \frac{f}{a}, \varphi_n' \right) \\ &= \lambda_n \left( \frac{f}{a}, \varphi_n \right) - \varepsilon \left( S \frac{f}{a}, \varphi_n' \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left( S \frac{f}{a}, \varphi_n' \right) &= \int_0^1 S \frac{f}{a} d\varphi_n = \varphi_n(x) S \frac{f}{a} \Big|_0^1 - \int_0^1 \left( S \frac{f}{a} \right)' \varphi_n(x) dx = \varphi_n(1) \frac{f(0)}{a(0)} + \int_0^1 S \left( \frac{f}{a} \right)' \varphi_n(x) dx \\ &= \varphi_n(1) \frac{f(0)}{a(0)} + \left( S \left( \frac{f}{a} \right)' \varphi_n \right), \end{aligned}$$

$$Sf, \varphi_n = \lambda_n \left( \frac{f}{a}, \varphi_n \right) - \frac{f(0)}{a(0)} - \varepsilon \varphi_n(1) - \varepsilon \left( S \left( \frac{f}{a} \right)' \varphi_n \right)$$

Демек,

$$\begin{aligned} y(x, \varepsilon, f) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(Sf, \varphi_n)}{\lambda_n} \varphi_n(x) = \frac{f(x)}{a} - \frac{f(0)}{a(0)} \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon \frac{\varphi_n(1)}{\lambda_n} \varphi_n(x) - \varepsilon y \left( x, \varepsilon, \frac{d}{dx} \frac{f}{a} \right) \\ &= \frac{f(x)}{a(x)} - \frac{f(0)}{a(0)} e(x) - \varepsilon y \left( x, \varepsilon, \frac{d}{dx} \frac{f}{a} \right) \end{aligned}$$

Әрі қарай, математикалық индукция әдісі бойынша, мынадай,

$$y(x, \varepsilon, f) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left[ \frac{J^k f(x)}{a(x)} - \frac{J^k f(0)}{a(0)} e(x) \right] \varepsilon^k + (-1)^n \varepsilon^n L_\varepsilon^{-1} J^n f(x),$$

мұндағы,  $J^0 = I, Jf(x) = \frac{d f(x)}{dx a(x)}$

Жоғарыдағы (6) қалдықтың бағамы (3) алғыбағамнан шығады.

#### 4.Талқысы

Келесі,

$$\varepsilon y' + a(x)y = a(x)e^{k \int_0^x a(s)ds}, a(x) > 0, k > 0, x \in [0,1];$$

$$y(0)=0$$

мысал әдістің дәлдігінен хабар береді.

Бұл сәтте,

$$Df(x) = \frac{d f(x)}{dx a} \text{ болсын делік, } f(x) = a(x)e^{k \int_0^x a(s)ds}, k - const.$$

Сонда,

$$Df(x) = ka(x)e^{k \int_0^x a(s)ds}, \rightarrow$$

$$y(x, \varepsilon, f) = e^{k \int_0^x a(s)ds} - e(x) - \varepsilon y(x, \varepsilon, Df).$$

Енді,  $Df(x)$  пен  $f(x)$  айырмасы  $k$  көбейткіші екенін ескерсек, онда

$$y(x, \varepsilon, Df) = ky(x, \varepsilon, f),$$

сондықтан,

$$y(x, \varepsilon, f) = e^{k \int_0^x a(s)ds} - e(x) - \varepsilon \times ky(x, \varepsilon, f), \rightarrow$$

$$(1 + \varepsilon k) y(x, \varepsilon, f) = e^{k \int_0^x a(s)ds} - e(x), \rightarrow$$

$$y(x, \varepsilon, f) = \frac{e^{k \int_0^x a(s)ds} - e(x)}{1 + \varepsilon k}.$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} y(x, \varepsilon, f) = \begin{cases} e^{k \int_0^x a(s)ds}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$y(x, \varepsilon, f) = \frac{e^{k \int_0^x a(\tau)d\tau}}{1 + \varepsilon k}$  функциясы  $|\varepsilon k| < 1$  сәтінде біздің теңдеудің (бірегей және дербес) аналитикалық шешімі болады.

#### 5.Қорытынды

Әдісімізді Вишик пен Василеваның шекқатпарлық функция әдісімен саластыралық

$H = L^2(0,1)$  –кеңістігінде Кошидің, мынадай,

$$\varepsilon y'(x) + a(x)y(x) = f(x), x \in (0, 1] \quad (7)$$

$$y(0) = 0 \quad (8)$$

сингуляр әсерленген есебін қарастыралық, мұндағы  $a(x)$  пен  $f(x)$  қажетінше біртегіс функция, ал  $\varepsilon > 0$  –азшамалы параметр.

Осы (7)-(8) есептің шешімін, мына,

$$y(x, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{n-1} [\varphi_k(x) + \psi_k(\tau)] \varepsilon^k + \varepsilon^n R_n(x, \tau) \quad (9)$$

түрде іздейік, мұндағы  $\tau = \frac{x}{\varepsilon}$  – шабан параметр. Осы өрнекті, жоғарыдағы, (7) теңдеуге апарып қоялық, сонда, мынадай,

$$\begin{aligned} & \varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} \left[ \varphi'_k(x) + \dot{\psi}_k \times \frac{1}{\varepsilon} \right] \varepsilon^k + \varepsilon^{n+1} R'_n + \\ & + a(x) \sum_{k=0}^{n-1} [\varphi_k(x) + \psi_k(\tau)] \varepsilon^k + \varepsilon^n a(x) R_n(x, \tau) = f(x), \end{aligned}$$

тендік аламыз, мұндағы  $(\cdot)$  – жоғарғы нүкте арқылы  $\tau$  – айнымалысы бойынша туынды белгіленген Жакшаларды ашайық;

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon^{k+1} \varphi'_k(x) + \sum_{k=0}^{n-1} \dot{\psi}_k(\tau) \times \varepsilon^k + \varepsilon^{n+1} R'_n + \\ & + \sum_{k=0}^{n-1} [a(x) \varphi_k(x) + a(x) \psi_k(\tau)] \varepsilon^k + \\ & + \varepsilon^n a(x) R_n(x, \tau) = f(x), \\ & \sum_{k=1}^{n-1} [\varphi'_{k-1}(x) + \dot{\psi}_k + a(x) \varphi_k(x) + a(x) \psi_k(\tau)] \varepsilon^k + \\ & + \varepsilon^n (\varepsilon R'_n + a(x) R_n(x, \tau) + \varphi'_{n-1}) + \dot{\psi}_0(\tau) + a(x) \varphi_0(x) + a(x) \psi_0(\tau) = f(x) \end{aligned}$$

Мұнан,

$$\begin{aligned} & a(x) \times \varphi_0(x) = f(x), \rightarrow \varphi_0(x) = \frac{f(x)}{a(x)}; \\ & \dot{\psi}_0(\tau) + a(x) \psi_0(\tau) = 0, \frac{\dot{\psi}_0}{\psi} = -a(x), \int_0^{\tau(x)} \frac{\dot{\psi}_0}{\psi} d\tau = - \int_0^x a(x) dx = \\ & = - \int_0^x d(x) \frac{dx}{\varepsilon}; \ln \psi_0(\tau) / \psi_0^{\tau} = - \int_0^x \frac{d(\xi)}{\xi} d\xi, \\ & \ln \frac{\psi_0(\tau)}{\psi_0(0)} = - \frac{1}{\varepsilon} \int_0^x a(\xi) d\xi, \psi_0(\tau) = \psi_0(0) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^x a(\xi) d\xi}, \tau = \frac{x}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Әрі қарай,  $x$  – қа тәуелді функцияларды бөлек, ал  $\tau$  –ға тәуелді функцияларды бөлек нөлге теңеп, мынадай:

$$\begin{aligned} & \varphi'_{k-1}(x) + a(x) \varphi_k(x) = 0, \rightarrow \varphi_k(x) = - \frac{\varphi'_{k-1}(x)}{a(x)}; \\ & \dot{\psi}_k + a(x) \psi_k(\tau) = 0, \rightarrow \psi_k(\tau) = \psi_k(0) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^x a(\xi) d\xi}; \end{aligned}$$

тендіктер аламыз. Енді бастапқы шартқа жүгінеміз:

$$y(x, \varepsilon) /_{x=0} = 0, \rightarrow \varphi_k(0) + \psi_k(0) = 0, R_n(x, \tau) /_{x=0} = 0.$$



Демек,  $\psi_k(0) = -\varphi_k(0)$ ,  $\rightarrow$

$$\psi(0) = -\varphi_0(0) = -\frac{f(0)}{a(0)}, \psi_1(0) = -\varphi_1(0) = \frac{\varphi_0'(0)}{a(0)}.$$

Ыңғайлы болу үшін, мынадай,

$$Df(x) = \frac{d f(x)}{dx a(x)}. D^0 = I$$

белгілеулер енгізейік, сонда

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= \frac{f(x)}{a(x)} = \frac{D^0 f(x)}{a(x)}, \\ \varphi_1(x) &= -\frac{\varphi_0'(x)}{a(x)} = -\frac{1}{a(x)} \frac{d f(x)}{dx a(x)} = -\frac{Df(x)}{a(x)}, \\ \varphi_2(x) &= -\frac{\varphi_1'(x)}{a(x)} = \frac{D^2 f(x)}{a(x)}, \dots, \varphi_k(x) = (-1)^k \frac{D^k f(x)}{a(x)}. \end{aligned}$$

Сондықтан,

$$\psi_k(\tau) = -\varphi_k(0) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^x a(\xi) d\xi} = -(-1)^k \frac{D^k f(0)}{a(0)} \times e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^x a(\xi) d\xi}.$$

Қалдық  $R_n(x, \tau)$  мүшесі үшін, мынадай,

$$R_n' + a(x)R_n + \varphi_{n-1}' = 0,$$

теңдеу аламыз және оған, мынадай,

$$R_n(0, \tau) = 0$$

бастапқы шарт тіркеседі, яғни  $R_n(x, \tau)$  функциясы, мынадай,

$$\begin{aligned} R_n' + a(x)R_n &= -\varphi_{n-1}'(x) = (-1)^n D^n f(x) \\ R_n(x, \tau) /_{x=0} &= 0 \end{aligned}$$

Коши есебінің шешімі. Демек,  $R_n(x, \tau) = (-1)^n y(x, \varepsilon, D^n f)$ , мұндағы  $y(x, \varepsilon, D^n f)$  – дегеніміз сол бастапқы (7)-(8) есептің шешімі, оң жағы  $(-1)^n D^n f(x)$  болған сәттегі.

Сонымен жоғарыдағы (7)-(8) есептің шешімі бар болса, онда ол, мынадай,

$$\begin{aligned} y(x, \varepsilon, f) &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left[ \frac{D^k f(x)}{a(x)} - \frac{D^k f(0)}{a(0)} e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^x a(\xi) d\xi} \right] \varepsilon^k + \\ &+ \varepsilon^n (-1)^n y(x, \varepsilon, D^n f) \end{aligned}$$

болады.

Әдістің әлсіз тұстары:

- 1) Жоғарыдағы (7)-(8) есептің шешімінің бар жоқтығы туралы ләм-лим деп ауыз ашпайды.
- 2) Неліктен шешімді (ол бар болған сәтте) (9) түрінде іздеуіміз керек?
- 3) Есептеу барысында, мынадай,

$$\varphi_{k-1}'(x) + a(x)\varphi_k(x) + \psi_k(\tau) + a(x)\psi_k(\tau) = 0$$

бір теңдеуден, мынадай,

$$\varphi_{k-1}'(x) + a(x)\varphi_k(x) = 0, \psi_k(\tau) + a(x)\psi_k(\tau) = 0$$

екі теңдеуге көшеді, шын мәнінде  $\tau$  шамасы  $x$  –қа тәуелді  $\left(\tau = \frac{x}{\varepsilon}\right)$  сондықтан бұл әрекетте негізсіздіктің ізі айқын байқалады.

4) Ең сорақысы, қалдық  $R_n(x, \tau)$  мүшені қалай бағалау туралы ешнәрсе айтылмайды.

Қолданбалы математикада, мұндай әдістер көптеп кездеседі, олар қосымша мәліметті практикадан немесе, эксперименттен көріп тұрады, сондықтан, олар үшін нәтижеге тез қол жеткізу маңызды, басқасын кейін көре жатармыз дейді-де, сол деймен қалып қояды. Біздің әдісіміздің нақты әрі дәл екені айдан анық, ал жоғарыдағы әдісті эмпиристикалық десек те болады.

#### ӘДЕБИЕТ

- [1] Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений.-М.: Высш. шк. 1990.-200с.
- [2] Вишик М.И., Люстерник А.А. Регулярное вырождение и погранслоный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи математических наук, 1957. №5. с.3-122.
- [3] A. N. Tikhonov, Mat. Sbornik 27, 147-156 (1950), (in Russian).
- [4] M. I. Imanaliev, Asymptotical Methods in the Theory of Singularly Perturbed Integro-Differential Systems, Ilim, Bishkek,
- [5] S. Lomov, Introduction to the General Theory of Singular Perturbations, American Mathematical Society, Providence, RI, 1992.
- [6] V. Butuzov, Comput. Math. Math. Phys. 12, 14-34 (1972).
- [7] A. Vasil'eva, and V. Tupchiev, Soviet Math. Dokl. 9, 179-183 (1968).
- [8] V. Trenogin, Russian Math. Surveys 25, 119-156 (1970).
- [9] T. Sh. Kal'menov, S. T. Akhmetova, and A. Sh. Shaldanbaev, Mat. Zh. Almaty 4, 41-48 (2004), (in Russian).
- [10] T. Sh. Kal'menov, and U. A. Iskakova, Doklady Mathematics 45, 1460-1466 (2009).
- [11] T. Sh. Kal'menov, and A. Sh. Shaldanbaev, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems 18, 352-369 (2010).
- [12] A. Kopzhassarova, and A. Sarsenbi, Abstract and Applied Analysis 2012, 1-6 (2012), (Article ID 576843).
- [13] Orazov I., Shaldanbaev A., Shomanbayeva M. About the nature of the spectrum of the periodic problem for the heat equation with a deviating argument. // Abstract and Applied Analysis. Volume 2013(2013). Article ID 128363, 6 pages <http://dx.doi.org/10.1155/2013/128363>.
- [14] A. Sh. Shaldanbaev, Manat Shomanbayeva, Isabek Orazov, Solution of a singularly perturbed Cauchy problem using a method of a deviating argument, AIP Conference Proceedings 1676, 020072 (2015); doi: 10.1063/1.4930498
- [15] A. Sh. Shaldanbaev, Manat Shomanbayeva, and Asylzat Kopzhassarova, Solution of a singularly perturbed Cauchy problem for linear systems of ordinary differential equations by the method of spectral decomposition, AIP Conference Proceedings 1759, 020090 (2016); doi: 10.1063/1.4959704.
- [16] Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т.1-2. – М.: Мир, 1977.
- [17] Ахиезер Н.Н., Глазман Н.М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве.-М.: Наука, 1966.,-544с.

#### REFERENCES

- [1] Vasil'eva A.B., Butuzov V.F. Asimptoticheskie metody v teorij singuljarnyh vozmushhenij.-M.: Vyssh. shk. 1990.-200s.
- [2] Vishik M.I., Ljusternik A.A. Reguljarnoe vyrozhdzenie i pogranslojnyj sloj dlja linejnyh differencial'nyh uravnenij s malym parametrom // Uspehi matematicheskikh nauk, 1957. №5. s.3-122.
- [3] A. N. Tikhonov, Mat. Sbornik 27, 147-156 (1950), (in Russian).
- [4] M. I. Imanaliev, Asymptotical Methods in the Theory of Singularly Perturbed Integro-Differential Systems, Ilim, Bishkek,
- [5] S. Lomov, Introduction to the General Theory of Singular Perturbations, American Mathematical Society, Providence, RI, 1992.
- [6] V. Butuzov, Comput. Math. Math. Phys. 12, 14-34 (1972).
- [7] A. Vasil'eva, and V. Tupchiev, Soviet Math. Dokl. 9, 179-183 (1968).
- [8] V. Trenogin, Russian Math. Surveys 25, 119-156 (1970).
- [9] T. Sh. Kal'menov, S. T. Akhmetova, and A. Sh. Shaldanbaev, Mat. Zh. Almaty 4, 41-48 (2004), (in Russian).
- [10] T. Sh. Kal'menov, and U. A. Iskakova, Doklady Mathematics 45, 1460-1466 (2009).
- [11] T. Sh. Kal'menov, and A. Sh. Shaldanbaev, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems 18, 352-369 (2010).
- [12] A. Kopzhassarova, and A. Sarsenbi, Abstract and Applied Analysis 2012, 1-6 (2012), (Article ID 576843).

[13] Orazov I., Shaldanbaev A., Shomanbayeva M. About the nature of the spectrum of the periodic problem for the heat equation with a deviating argument. // Abstract and Applied Analysis. Volume 2013(2013). Article ID 128363, 6 pages <http://dx.doi.org/10.1155/2013/128363>.

[14] A. Sh. Shaldanbaev, Manat Shomanbayeva, Isabek Orazov, Solution of a singularly perturbed Cauchy problem using a method of a deviating argument, AIP Conference Proceedings 1676, 020072 (2015); doi: 10.1063/1.4930498

[15] A. Sh. Shaldanbaev, Manat Shomanbayeva, and Asylzat Kopzhassarova, Solution of a singularly perturbed Cauchy problem for linear systems of ordinary differential equations by the method of spectral decomposition, AIP Conference Proceedings 1759, 020090 (2016); doi: 10.1063/1.4959704.

[16] Rid M., Sajmon B. Metody sovremennoj matematicheskoj fiziki. T.1-2. – M.: Mir, 1977.

[17] Ahiezer N.N., Glazman N.M. Teoriya linejnyh operatorov v gil'bertovom prostranstve. – M.: Nauka, 1966., -544s.

УДК 517.94

**Э. Мусрепова, А.Н. Жидебаева, А.Ш. Шалданбаев**

Южно-Казахстанский педагогический университет, г.Шымкент

**ОБ ОПЕРАТОРНЫХ МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ КОШИ  
ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С  
ПЕРЕМЕННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ**

**Аннотация.** В данной работе получено спектральное разложение решения задачи Коши в пространстве с индефинитной метрикой, и с помощью этого разложения выведено погранслоное разложение решения сингулярно возмущенной задачи Коши, для модельного уравнения первого порядка  $\varepsilon y' + a(x)y(x) = f(x)$ ,  $y(0) = 0$ ,  $a(x) > 0$ ,  $f(x) \in W_2^n[0,1]$ ,  $a(x) \in C^n[0,1]$ .

**Ключевые слова:** вполне непрерывный оператор, теорема Гилберта – Шмидта, самосопряженный оператор, вольтеровые операторы, индефинитная метрика, разложение Шмидта, полнота, ортонормированный базис.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 6, Number 316 (2017), 108 – 114

A.N. Issadykov<sup>1,2</sup>, M.A. Ivanov<sup>1</sup>,  
G.S. Nurbakova<sup>2,3</sup>, S.A. Zhaugasheva<sup>2,3</sup>, Zh. Muratkhan<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, Russian Federation;

<sup>2</sup>Scientific Research Institutes of Experimental and theoretical physics, Almaty, Republic of Kazakhstan;

<sup>3</sup>Al -Farabi Kazakh National University, Almaty, Republic of Kazakhstan

[issadykov.a@gmail.com](mailto:issadykov.a@gmail.com), [g.nurbakova@gmail.com](mailto:g.nurbakova@gmail.com)

## $B_s \rightarrow \phi$ TRANSITION IN COVARIANT QUARK MODEL

**Abstract.** In this paper the matrix element of exclusive decay  $H_1 \rightarrow H_2 + l^+ l^-$  was written in the form of a combination of matrix elements of local operators. These matrix elements of local operators are defined in terms of form factors. The behavior of form factors is obtained in the full kinematic region of the square of the transferred momentum. The connection of our form factors with the form factors of other theoretical approaches is given. We compared the numerical values of the form factors derived from the covariant quark model for the  $B_s \rightarrow \phi$  transition with values of other studies, and found full agreement.

**Keywords:** Form factors,  $B_s \rightarrow \phi$  transition, covariant quark model.

УДК 539.126.4

А.Н. Исадыков<sup>1,2</sup>, М.А. Иванов<sup>1</sup>,  
Г.С. Нурбакова<sup>2,3</sup>, С.А. Жаугашева<sup>2,3</sup>, Ж. Муратхан<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Объединенный Институт Ядерных Исследований, г. Дубна, Российская Федерация;

<sup>2</sup>Научно-исследовательский институт экспериментальной и теоретической физики,  
г. Алматы, Республика Казахстан;

<sup>3</sup>Казахский Национальный Университет им. аль-Фараби, г. Алматы, Республика Казахстан

## $B_s \rightarrow \phi$ ПЕРЕХОД В КОВАРИАНТНОЙ МОДЕЛИ КВАРКОВ

**Аннотация.** В рамках данной работы написан матричный элемент эксклюзивного распада  $H_1 \rightarrow H_2 + l^+ l^-$  в виде комбинации матричных элементов локальных операторов. Эти матричные элементы локальных операторов определены через формфакторы. Поведение формфакторов получено во всей кинематической области квадрата переданного импульса. Приведена связь наших формфакторов с формфакторами других теоретических подходов. При сравнении численных значений формфакторов  $B_s \rightarrow \phi$  перехода, полученных в ковариантной модели кварков, со значениями других работ и подходов показало полное согласие.

**Ключевые слова:** Формфакторы,  $B_s \rightarrow \phi$  переход, ковариантная модель кварков.

### Введение

Распад  $B_s \rightarrow \phi \mu^+ \mu^-$  протекает через петлевые диаграммы, как показано на рисунке 1, за счет нейтральных токов с изменением флэйвора. В рамках СМ новые тяжелые частицы могут появляться в конкурирующих диаграммах и влиять на значения брэнчингов распада и на угловые распределения частиц в конечном состоянии.

Этот канал распада был впервые обнаружен и исследован коллаборацией CDF [1, 2], в дальнейшем изучен коллаборацией LHCb [3,4]. Несмотря на то, что угловые распределения были в

хорошим согласии с ожиданиями СМ, измеренный брэнчинг распада имел расхождение с предсказанием СМ на уровне 3.1 стандартных отклонения [4,5].

Распад  $B_S \rightarrow \phi \mu^+ \mu^-$  аналогичен распаду  $B \rightarrow K^* \mu^+ \mu^-$ . Поскольку рождение  $B_S$ -мезона подавлено по отношению к  $B^0$ -мезону соотношением  $f_s / f_d \sim 1/4$ , узкий  $\phi$ -резонанс обеспечивает чистый набор данных с низким уровнем фона. Более того, вклад  $S$ -волны, где спин системы  $K^+ K^-$  равен нулю, по теоретическим вычислениям, проведенным в работе [6], ожидается незначительным. Основное отличие распада  $B_S \rightarrow \phi \mu^+ \mu^-$  от распада  $B \rightarrow K^* \mu^+ \mu^-$  заключается в том, что конечное состояние не содержит информацию о начальном состоянии мезона, был ли начальный мезон  $B_S$  или  $\bar{B}_S$ . Кроме того,  $B_S - \bar{B}_S$  смешивание может иметь вклад в прямой распад, обеспечивая дополнительный вклад в амплитуду. Этот вопрос был рассмотрен подробно в работе [7].

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФОРМФАКТОРОВ $B_S \rightarrow \phi$ ПЕРЕХОДА

Рассмотрим эксклюзивный распад тяжелого адрона  $H_1 = B_S$  в легкий адрон  $H_2 = \phi$  и лептонную пару. Кинематика данного распада определяется как  $H_1(p_1) \rightarrow H_2(p_2) + l^+(k_1) + l^-(k_2)$ , где  $p_1 = p_2 + k_1 + k_2$ ,  $p_1^2 = m_{lep}^2$ ,  $p_2^2 = m_2^2$  и  $k_1^2 = k_2^2 = m_{lep}^2$ .  $m_1, m_2, m_{lep}$  являются массами начального мезона  $H_1$ , конечного мезона  $H_2$  и лептона  $l$  соответственно. Матричный элемент эксклюзивного распада  $H_1 \rightarrow H_2 + l^+ l^-$  записывается в виде комбинации матричных элементов локальных  $\bar{s}\Gamma b$  операторов, определяющих матричный элемент распада  $b \rightarrow s l^+ l^-$ :

$$M(H_1 \rightarrow H_2 \bar{\ell} \ell) = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\alpha \lambda_1}{2\pi} \cdot \{C_9^{eff} \langle H_2 | \bar{s} O^\mu b | H_1 \rangle \bar{\ell} \gamma_\mu \ell + C_{10} \langle H_2 | \bar{s} O^\mu b | H_1 \rangle \bar{\ell} \gamma_\mu \gamma_5 \ell - \frac{2\hat{m}_b}{q^2} C_7^{eff} \langle H_2 | \bar{s} i \sigma^{\mu\nu} (1 + \gamma^5) q^\nu b | H_1 \rangle \bar{\ell} \gamma_\mu \ell \}. \quad (1)$$

Матричные элементы локальных операторов параметризуются с помощью набора скалярных функций, называемых формфакторами, которые зависят от квадрата переданного лептонной паре импульса  $q = k_1 + k_2$ . Данная кинематическая переменная изменяется в следующих пределах:

$$4m_{lep}^2 \leq q^2 \leq (m_1 - m_2)^2. \quad (2)$$

Диаграмма Фейнмана, описывающая  $B_S \rightarrow \phi$  переход в рамках нашей ковариантной модели кварков, изображена на рисунке 1. Матричные элементы выражаются через безразмерные формфакторы следующим образом [8, 9]:

$$\langle \Phi(p_2, \epsilon_2) | \bar{s} O^\mu b | B_S(p_1) \rangle = N_c g_{B_S} g_\Phi \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4 i} \tilde{\Phi}_{B_S}(-k + w_{13} p_1)^2 \tilde{\Phi}_\Phi(-k + w_{23} p_2)^2 \times \text{tr}[O^\mu S_b(k + p_1) \gamma^5 S_s(k) e_2^\dagger S_s(k + p_2)] = \frac{\epsilon_v^\dagger}{m_1 + m_2} \left( -g^{\mu\nu} P \cdot q A_0(q^2) + P^\mu P^\nu A_+(q^2) + q^\mu P^\nu A_-(q^2) + i \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} P_\alpha q_\beta V(q^2) \right), \quad (3)$$

$$\langle \Phi(p_2, \epsilon_2) | \bar{s} (\sigma^{\mu\nu} q_\nu (1 + \gamma^5)) b | B_S(p_1) \rangle = N_c g_{B_S} g_\Phi \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4 i} \tilde{\Phi}_{B_S}(-k + w_{13} p_1)^2 \tilde{\Phi}_\Phi(-k + w_{23} p_2)^2 \times \text{tr} \left[ (\sigma^{\mu\nu} q_\nu (1 + \gamma^5)) S_b(k + p_1) \gamma^5 S_s(k) e_2^\dagger S_s(k + p_2) \right] = \epsilon_v^\dagger \left( -(g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu / q^2) P \cdot q a_0(q^2) + (P^\mu P^\nu - q^\mu P^\nu P \cdot q / q^2) a_+(q^2) + i \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} P_\alpha q_\beta g(q^2) \right), \quad (4)$$

здесь  $P = p_1 + p_2$ ,  $q = p_1 - p_2$ ,  $\epsilon_2^\dagger \cdot p_2 = 0$ ,  $p_1^2 = m_1^2 \equiv m_{B_S}^2$ ,  $p_2^2 = m_2^2 \equiv m_\phi^2$  и слабая матрица

$O^\mu = \gamma^\mu(1 - \gamma^5)$ . Поскольку существуют три кварка, участвующих в этих процессах, мы ввели обозначение с двумя индексами  $w_{ij} = m_{q_j} / (m_{q_i} + m_{q_j})$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ), так что  $w_{ij} + w_{ji} = 1$ . Формфакторы, определенные в уравнении (4), удовлетворяют физическому требованию  $a_0(0) = a_+(0)$ , которое гарантирует отсутствие кинематической сингулярности в матричном элементе при  $q^2 = 0 \text{ ГэВ}^2$ .

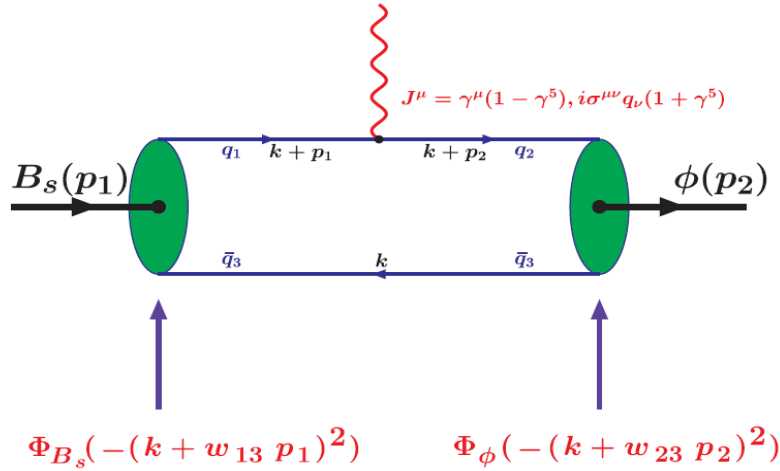


Рисунок 1 – Схематическое представление матричных элементов описывающих  $B_s \rightarrow \Phi$  переход. Определение кварков и обозначения:  $q_1 = b, q_2 = q_3 = s, w_{13} = m_s / (m_b + m_s)$ , и  $w_{23} = 1/2$

### ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ $B_s \rightarrow \Phi$ ПЕРЕХОДА

На рисунках 2 и 3 приведены формфакторы, полученные путем интегрирования петли в уравнениях (3) и (4).

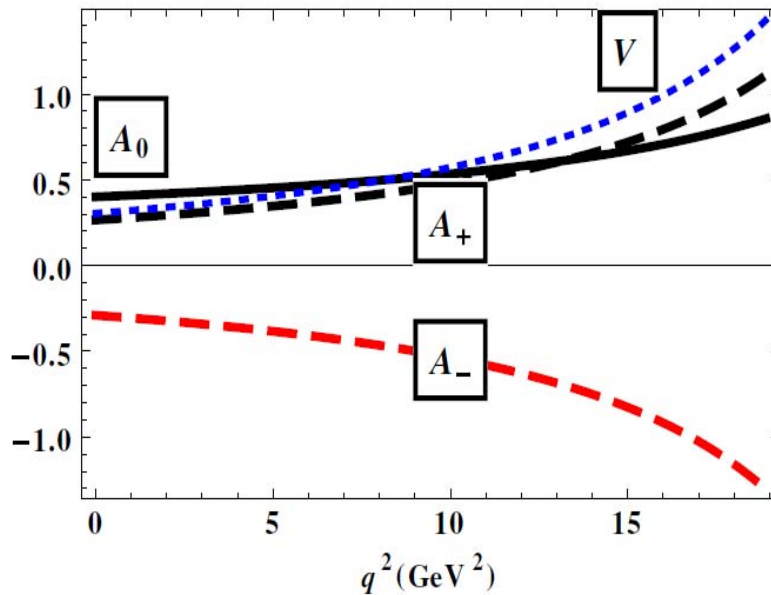


Рисунок 2 – Векторные и аксиальные формфакторы в зависимости от переданного импульса  $q^2$

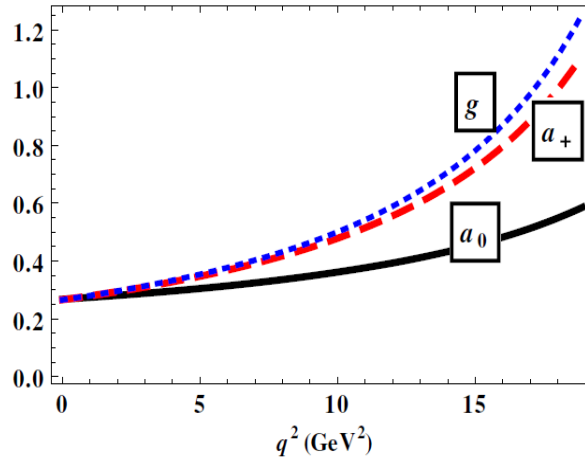


Рисунок 3 – Тензорные формфакторы в зависимости от переданного импульса  $q^2$

Вычисленные формфакторы аппроксимируются дипольной параметризацией, как и в предыдущем разделе:

$$F(q^2) = \frac{F(0)}{1 - as + bs^2}, \quad s = \frac{q^2}{m_1^2}. \tag{5}$$

Значения  $F(0)$ ,  $a$  и  $b$  для  $B_s \rightarrow \Phi$  перехода в ковариантной модели кварков приведены в таблице 1.

Таблица 1 – Параметры для формфакторов в уравнении (5)

	$A_0$	$A_+$	$A_-$	$V$	$a_0$	$a_+$	$g$
$F(0)$	0.40	0.27	-0.29	0.31	0.27	0.27	0.27
$a$	0.62	1.41	1.48	1.51	0.66	1.41	1.52
$b$	-0.30	0.38	0.45	0.47	-0.26	0.39	0.49

Поскольку в таблице 2  $a_0(0) = a_+(0) = g(0)$ , мы приводим следующие формфакторы и сравниваем их с результатами других подходов:

$$\begin{aligned} A_0^c(0) &= (m_1 - m_2)[A_0(0) - A_+(0)]/(2m_2), \\ A_1^c(0) &= A_0(0)(m_1 - m_2)/(m_1 + m_2), \\ A_2^c(0) &= A_+(0), \\ T_1^c(0) &= g(0), \\ T_3^c(0) &= \lim_{q^2 \rightarrow 0} (m_1^2 - m_2^2)(a_+ - a_0)/q^2. \end{aligned} \tag{6}$$

Таблица 2 – Формфакторы  $B_s \rightarrow \phi$  перехода при максимальной передаче импульса  $q^2 = 0$  в ковариантной модели кварков в сравнении со значениями других работ и подходов

	$V^c(0)$	$A_0^c(0)$	$A_1^c(0)$	$A_2^c(0)$	$T_1^c(0)$	$T_3^c(0)$
Наша модель	0.31±0.03	0.28±0.03	0.27±0.03	0.27±0.03	0.27±0.03	0.18±0.02
[8]	0.32		0.29	0.28	0.28	
[10]	0.434±0.035	0.474±0.03	0.311±0.03	0.234±0.03	0.349±0.03	0.175±0.02
[11]	0.406±0.020	0.322±0.016	0.320±0.02	0.318±0.016	0.275±0.01	0.133±0.01
[12]	0.43	0.38	0.30	0.26	0.35	0.25
[13]	0.25±0.05	0.30±0.05	0.19±0.04			
[14]	0.44	0.42	0.34	0.31	0.38	0.26
[15]	0.26±0.07	0.31±0.07	0.18 <sup>+0.06</sup> <sub>-0.05</sub>	0.12±0.03	0.23 <sup>+0.06</sup> <sub>-0.05</sub>	0.19±0.05
[16]	0.329	0.279	0.232	0.210	0.276	0.170
[17]	0.339±0.017		0.271±0.01	0.212±0.01	0.299±0.01	0.191±0.01

Формфакторы  $A^i$  и  $V^i$  ( $i = 1, 2$ ) связаны с формфакторами в ковариантной модели кварков следующими соотношениями:

$$V^{(1)} = C_9^{\text{eff}} V + C_7^{\text{eff}} g \frac{2\bar{m}_b(m_1+m_2)}{q^2},$$

$$A_0^{(1)} = C_9^{\text{eff}} A_0 + C_7^{\text{eff}} a_0 \frac{2\bar{m}_b(m_1+m_2)}{q^2},$$

$$A_+^{(1)} = C_9^{\text{eff}} A_+ + C_7^{\text{eff}} a_+ \frac{2\bar{m}_b(m_1+m_2)}{q^2},$$

$$A_-^{(1)} = C_9^{\text{eff}} A_- + C_7^{\text{eff}} (a_0 - a_+) \frac{2\bar{m}_b(m_1+m_2) P_q}{q^2},$$

$$V^{(2)} = C_{10} V,$$

$$A_0^{(2)} = C_{10} A_0, A_{\pm}^{(2)} = C_{10} A_{\pm},$$

$$A_-^{(2)} = C_{10} A_-.$$

(7)

### Выводы

В рамках данной работы написан матричный элемент эксклюзивного распада  $H_1 \rightarrow H_2 + l^+ l^-$  в виде комбинации матричных элементов локальных операторов. Эти матричные элементы локальных операторов определены через формфакторы. Поведение формфакторов получено во всей кинематической области квадрата переданного импульса. Приведена связь наших формфакторов с формфакторами, приведенными в работе [18]. При сравнении численных значений формфакторов  $B_s \rightarrow \phi$  перехода, полученных в ковариантной модели кварков, со значениями других работ и подходов показало полное согласие.

### Благодарность

Данная статья выполнена в рамках грантового финансирования научных проектов Министерства образования и науки Республики Казахстан по теме 3092/ГФ4, номер государственной регистрации №0115РК01040, а также гранта «ЛП ВУЗа-2016».

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Aaltonen T. et. al. Observation of the Baryonic Flavor-Changing Neutral Current Decay  $\Lambda_b \rightarrow \Lambda \mu^+ \mu^-$  // Phys.Rev.Lett. – 2011. –Vol.107. –P.201802 // arXiv: 1107.3753 [hep-ex].
- [2] CDF collaboration. Measurement of the Forward-Backward Asymmetry in the  $B \rightarrow K^{(*)} \mu^+ \mu^-$  Decay and First Observation of the  $B_0 \rightarrow \phi \mu^+ \mu^-$  Decay // Phys.Rev.Lett. – 2011. –Vol. 106. –P.161801 // arXiv:1101.1028 [hep-ex].
- [3] Aaij R. et. al. Differential branching fraction and angular analysis of the decay  $B_s^0 \rightarrow \phi \mu^+ \mu^-$  // Journal of High Energy Physics – 2013. –Vol.1307. –P.084 // arXiv: 1305.2168 [hep-ex].
- [4] Altmannshofer W., Straub D.M. New physics in  $b \rightarrow s$  transitions after LHC run 1 //Eur.Phys.J. C – 2015. –Vol.75, №8. –P.382 // arXiv: 1411.3161 [hep-ph].
- [5] Lyon J. and Zwicky R. Resonances gone topsy turvy - the charm of QCD or new physics in  $b \rightarrow s \ell^+ \ell^-$  // arXiv: 1406.0566 [hep-ph].
- [6] LHCb collaboration. Amplitude analysis and the branching fraction measurement of  $B^0 \rightarrow J/\psi K^+ K^-$  // Phys.Rev. D – 2013. –Vol. 87, №7. –P.072004 // arXiv:1302.1213 [hep-ex].
- [7] Descotes-Genon S. and Virto J. \ Time dependence in  $B \rightarrow V \ell \ell$  decays // Journal of High Energy Physics – 2015. – Vol. 1504. –P.045 // arXiv:1502.05509 [hep-ph].
- [8] Ivanov M. A. et.al. Form factors for semileptonic, nonleptonic and rare B(Bs) meson decays // Phys.Rev. D – 2012. – Vol. 85. –P.034004 // arXiv: 1112.3536 [hep-ph].
- [9] Dubnička S. et.al. Decay  $B \rightarrow K^{*}(\rightarrow K \pi) \ell^+ \ell^-$  in covariant quark model // Few Body Syst. – 2016. –Vol. 57, №2. – P.121-143 // arXiv:1511.04887 [hep-ph].
- [10] Ball P. and Zwicky R.  $B_d, s \rightarrow \rho, \omega, K^*, \phi$  decay form-factors from light-cone sum rules revisited // Phys.Rev. D – 2005. –Vol.71. –P.014029.



- [11] Faustov R.N. and Galkin V.O. Rare Bs decays in the relativistic quark model // Eur.Phys.J. C – 2013. –Vol. 73, №10. –P.2593 // arXiv:1309.2160 [hep-ph].
- [12] Yilmaz U.O. Analysis of  $B_s \rightarrow \phi \ell^+ \ell^-$  decay with new physics effects // Eur.Phys.J. C – 2008. –Vol. 58. –P.555-568 // arXiv:0806.0269 [hep-ph].
- [13] Ali A. et. al. Charmless non-leptonic BsBs decays to PP, PV and VV final states in the pQCD approach// Phys.Rev. D – 2007. –Vol. 76. –P.074018.
- [14] Melikhov D. and Stech B. Weak form-factors for heavy meson decays: An Update // Phys.Rev. D – 2000. –Vol. 62. –P.014006.
- [15] Li R.H., Lu C.D. and Wang W. Transition form factors of B decays into p-wave axial-vector mesons in the perturbative QCD approach // Phys.Rev. D – 2009. –Vol. 79. –P.034014 // arXiv:0901.0307 [hep-ph].
- [16] Lu C.D., Wang W. and Wei Z.T. Heavy-to-light form factors on the light cone // Phys.Rev. D – 2007. –Vol. 76. –P.014013.
- [17] Wu Y.L., Zhong M. and Zuo Y.B. B(s), D(s)  $\rightarrow$  pi, K, eta, rho, K\*, omega, phi Transition Form Factors and Decay Rates with Extraction of the CKM parameters  $|V(ub)|$ ,  $|V(cs)|$ ,  $|V(cd)|$  // Int.J.Mod.Phys. A – 2006. –Vol. 21. –P.6125-6172
- [18] Colangelo P., De Fazio F. and Wang W.  $B_s \rightarrow f_0(980)$  form factors and Bs decays into  $f_0(980)$  // Phys.Rev. D – 2010. –Vol. 81. –P.074001 // arXiv:1002.2880 [hep-ph].

## REFERENCES

- [1] Aaltonen T. et. al. Observation of the Baryonic Flavor-Changing Neutral Current Decay  $\Lambda_b \rightarrow \Lambda \mu^+ \mu^-$  // Phys.Rev.Lett. – 2011. –Vol.107. –P.201802 // arXiv: 1107.3753 [hep-ex].
- [2] CDF collaboration. Measurement of the Forward-Backward Asymmetry in the  $B \rightarrow K^{(*)} \mu^+ \mu^-$  Decay and First Observation of the  $B_0 \rightarrow \phi \mu^+ \mu^-$  Decay // Phys.Rev.Lett. – 2011. –Vol. 106. –P.161801 // arXiv:1101.1028 [hep-ex].
- [3] Aaij R. et. al. Differential branching fraction and angular analysis of the decay  $B_S^0 \rightarrow \phi \mu^+ \mu^-$  // Journal of High Energy Physics – 2013. –Vol.1307. –P.084 // arXiv: 1305.2168 [hep-ex].
- [4] Altmannshofer W., Straub D.M. New physics in  $b \rightarrow s$  transitions after LHC run 1 //Eur.Phys.J. C – 2015. –Vol.75, №8. –P.382 // arXiv: 1411.3161 [hep-ph].
- [5] Lyon J. and Zwicky R. Resonances gone topsy turvy - the charm of QCD or new physics in  $b \rightarrow s \ell^+ \ell^-$ ? // arXiv: 1406.0566 [hep-ph].
- [6] LHCb collaboration. Amplitude analysis and the branching fraction measurement of  $B^0 \rightarrow J/\psi K^+ K^-$  // Phys.Rev. D – 2013. –Vol. 87, №7. –P.072004 // arXiv:1302.1213 [hep-ex].
- [7] Descotes-Genon S. and Virto J. \ Time dependence in  $B \rightarrow V \ell \ell$  decays // Journal of High Energy Physics – 2015. –Vol. 1504. –P.045 // arXiv:1502.05509 [hep-ph].
- [8] Ivanov M. A. et.al. Form factors for semileptonic, nonleptonic and rare B(Bs) meson decays // Phys.Rev. D – 2012. –Vol. 85. –P.034004 // arXiv: 1112.3536 [hep-ph].
- [9] Dubnička S. et.al. Decay  $B \rightarrow K^{*}(\rightarrow K\pi) \ell^+ \ell^-$  in covariant quark model // Few Body Syst. – 2016. –Vol. 57, №2. –P.121-143 // arXiv:1511.04887 [hep-ph].
- [10] Ball P. and Zwicky R.  $B_d, s \rightarrow \rho, \omega, K^*, \phi$  decay form-factors from light-cone sum rules revisited // Phys.Rev. D – 2005. –Vol.71. –P.014029.
- [11] Faustov R.N. and Galkin V.O. Rare Bs decays in the relativistic quark model // Eur.Phys.J. C – 2013. –Vol. 73, №10. –P.2593 // arXiv:1309.2160 [hep-ph].
- [12] Yilmaz U.O. Analysis of  $B_s \rightarrow \phi \ell^+ \ell^-$  decay with new physics effects // Eur.Phys.J. C – 2008. –Vol. 58. –P.555-568 // arXiv:0806.0269 [hep-ph].
- [13] Ali A. et. al. Charmless non-leptonic BsBs decays to PP, PV and VV final states in the pQCD approach// Phys.Rev. D – 2007. –Vol. 76. –P.074018.
- [14] Melikhov D. and Stech B. Weak form-factors for heavy meson decays: An Update // Phys.Rev. D – 2000. –Vol. 62. –P.014006.
- [15] Li R.H., Lu C.D. and Wang W. Transition form factors of B decays into p-wave axial-vector mesons in the perturbative QCD approach // Phys.Rev. D – 2009. –Vol. 79. –P.034014 // arXiv:0901.0307 [hep-ph].
- [16] Lu C.D., Wang W. and Wei Z.T. Heavy-to-light form factors on the light cone // Phys.Rev. D – 2007. –Vol. 76. –P.014013.
- [17] Wu Y.L., Zhong M. and Zuo Y.B. B(s), D(s)  $\rightarrow$  pi, K, eta, rho, K\*, omega, phi Transition Form Factors and Decay Rates with Extraction of the CKM parameters  $|V(ub)|$ ,  $|V(cs)|$ ,  $|V(cd)|$  // Int.J.Mod.Phys. A – 2006. –Vol. 21. –P.6125-6172
- [18] Colangelo P., De Fazio F. and Wang W.  $B_s \rightarrow f_0(980)$  form factors and Bs decays into  $f_0(980)$  // Phys.Rev. D – 2010. –Vol. 81. –P.074001 // arXiv:1002.2880 [hep-ph].

А.Н. Исадыков<sup>1,2</sup>, М.А. Иванов<sup>1</sup>, Г.С. Нурбакова<sup>2,3</sup>, С.А. Жаугашева<sup>2,3</sup>, Ж. Мұратхан<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Біріккен ядролық зерттеулер институты, Дубна қ-сы, Ресей Федерациясы;

<sup>2</sup>Эксперименттік және теориялық физика ғылыми-зерттеу институты, Алматы қ-сы, Қазақстан Республикасы;

<sup>3</sup>Әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық Университеті, Алматы қ-сы, Қазақстан Республикасы

### КВАРКТАРДЫҢ КОВАРИАНТТЫҚ МОДЕЛІНДЕ $V_s \rightarrow \phi$ АУЫСУЫ

**Аннотация.** Бұл жұмыс шеңберінде  $H_1 \rightarrow H_2 + l^+ l^-$  эксклюзивті ыдырауының матрицалық элементі локальды операторлардың матрицалық элементтерінің комбинациясы түрінде жазылды. Бұл локальды операторлардың матрицалық элементтері формфакторлар арқылы анықталды. Формфакторлардың өзгеру тәртібі берілген импульстің квадратының дерлік кинематикалық аймағында анықталды. Біздің формфакторлар мен басқа да теориялық әдістер аясындағы алынған формфакторлар арасындағы байланыс келтірілді. Салыстыру,  $V_s \rightarrow \phi$  ауысуы үшін кварктардың коварианттық моделінің аясында алынған формфакторлардың сандық мәндері басқа да жұмыстар мен әдістерде алынған мәндермен толық үйлесімде екенін көрсетті.

**Тірек сөздер:** Формфакторлар,  $V_s \rightarrow \phi$  ауысуы, кварктардың коварианттық моделі.

#### Сведения об авторах:

Исадыков А. Н. – PhD доктор, научный сотрудник в ЛТФ им. Н. Н. Боголюбова, ОИЯИ, Дубна, Российская Федерация, научный сотрудник НИИЭТФ, Алматы, Республика Казахстан тел: + 7 701 4000 674, email: issadykov.a@gmail.com;

Иванов М. А. – д.ф.-м.н., профессор, начальник сектора в ЛТФ им. Н. Н. Боголюбова, ОИЯИ, Дубна, Российская Федерация, email: ivanovm@theor.jinr.ru;

Нурбакова Г. С. – к.ф.-м.н., доцент Казахского национального университета им. аль-Фараби, ведущий научный сотрудник НИИЭТФ, Алматы, Республика Казахстан Алматы, тел: + 7 707 724 67 80, email: g.nurbakova@gmail.com;

Жаугашева С.А. – к.ф.-м.н., и.о. профессора Казахского национального университета им. аль-Фараби, ведущий научный сотрудник НИИЭТФ, Алматы, Республика Казахстан Алматы, email: zhaugashevas@gmail.com;

Муратхан С. – магистрант Казахского национального университета им. аль-Фараби, научный сотрудник НИИЭТФ, Алматы, Республика Казахстан, тел: +7 707 332 61 62

## NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

## PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 6, Number 316 (2017), 115 – 130

**К.В.Якупов**

Institute of mathematics and mathematical modeling, Almaty, Kazakhstan.

E-mail: [jakupovKB@mail.ru](mailto:jakupovKB@mail.ru)**COMPLICABILITY OF THE "DARCY LAW"  
IN THE FILTRATION THEORY**

**Annotation.** The question of the unrepresentative application of the "Darconian law" in the theory of spatial filtration is considered. The falsity of the transformation of the Navier equations of a viscous incompressible fluid into the multidimensional equations of "eacon Darcy" is described in detail. The contradictions of the "Darconian law" equations are shown to the law of friction and Newton's second law. It is established that the multidimensional equations of "Darcy's" correspond to potential (irrotational) flows of an incompressible fluid, which contradicts the theory of a viscous fluid. In the equations of "Darcon's law" the law of conservation of energy does not hold. Proceeding from the fact that the "Darconi" equations are composed of first-order derivatives, contradictory problems in setting the boundary conditions are revealed. In the "Darcy law", only in a one-dimensional stationary flow are all three laws of physics fulfilled if one model is modeled by Euler's equations for an ideal fluid and in the equation of continuity, take into account the loss (sink) or profit (source) of the mass of fluid per unit volume per unit time. On the same basis, it is proposed to model the filtration of a viscous liquid by the Navier equations.

**Keywords:** filtration, pressure, velocity, acceleration, equations.

**К.Б. Джакупов**

Институт математики и математического моделирования МОН РК, Алматы, Казахстан

**КОМПЛИКАТИВНОСТЬ “ЗАКОНА ДАРСИ”  
В ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ**

**Аннотация.** Рассматривается вопрос о нерепрезентативности применения «закона Дарси» в теории пространственной фильтрации. Подробно освещается фальшивость трансформации уравнений Навье вязкой несжимаемой жидкости в многомерные уравнения «закона Дарси». Показаны противоречия уравнений «закона Дарси» закону трения и второму закону Ньютона. Установлено, что многомерные уравнения «закона Дарси» соответствуют потенциальным (безвихревым) течениям несжимаемой жидкости, что противоречит теории вязкой жидкости. В уравнениях «закона Дарси» не выполняется закон сохранения энергии. Исходя из факта, что уравнения «закона Дарси» составлены из производных 1-го порядка, выявлены противоречивые проблемы постановки граничных условий. В «закоме Дарси» только в одномерном стационарном течении выполняются все три закона физики, если одномерную фильтрацию моделировать уравнениями Эйлера идеальной жидкости и в уравнении неразрывности учитывать потерю (сток) или прибыль (источник) массы жидкости в единице объема в единицу времени. На этой же основе предлагается моделировать фильтрацию вязкой жидкости уравнениями Навье.

**Ключевые слова:** фильтрация, давление, скорость, ускорение, уравнения.

Формула зависимости скорости фильтрации  $v = |\mathbf{v}|$  от пьезометрического уклона  $s$  опубликована французским инженером Дарси в 1856г. [1-2] :

$$v = -\chi \frac{dh}{ds}, \quad (1)$$

и названа *законом Дарси*. В (1)  $h = \frac{p}{\rho g} + z$  пьезометрический напор, ось  $z$  направлена

вертикально вверх, направление  $s$  составляет с осью  $z$  угол пьезометрического уклона,  $\chi$  – коэффициент фильтрации (для песка  $\chi$  изменяется в интервале 0,01- 0,0001 м/сек). Важно то, что в

(1) модуль скорости равен  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = |\mathbf{v}|$ , так как из-за *пористости среды* фильтрация

является существенно пространственным движением, происходящим со скоростью  $\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k}$ , в силу чего, надо полагать, Дарси измерял в своих экспериментах не одну

какую-либо компоненту скорости, а именно величину полной скорости  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ ,

поэтому формула (1) должна быть оформлена подробнее:

$$\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = -\chi \frac{dh}{ds} \quad (2)$$

В том случае, когда направление уклона вертикально, т.е.  $s=z$ , из (2) вытекает, как следствие, формула:

$$\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = -\chi \frac{d}{dz} \left( \frac{p}{\rho g} + z \right) \quad (3)$$

Опять же пористость среды, *огибание частицами жидкости твердых составляющих пористой среды*, делает течение трехмерным:  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ , что учтено в (3).

В той же книге [1] приводятся значения коэффициента фильтрации  $\chi$  для различных сред. Можно ожидать, что значения коэффициента фильтрации  $\bar{\chi}$  будут другими, если следуя 2-му закону Ньютона, по которому **сила** вызывает обратно **пропорциональное массе ускорение**, т.е. вместо гидротехнической формулы Дарси необходимо использовать закон динамики:

$$\frac{dv_s}{dt} = -\chi \frac{dh}{ds}, v_s = \mathbf{v} \cdot \mathbf{s}, |\mathbf{s}| = 1,$$

положив коэффициент пористости равным  $\chi = \frac{1}{\rho}$ , тем самым избежать противоречий с одним из

основных законов физики. В принципе надо исходить из того, что при построении математических моделей того или иного явления, где действуют силы, вызывающие движение, непреложно руководствоваться законами Ньютона, законами сохранения материи и энергии. Математические модели, нарушающие законы физики, должны быть отвергнуты, как не имеющие физического обоснования.

1. Уравнение динамики «закона Дарси» является фальшивым, так как не соответствует закону трения  $\mathbf{F}_{тр} = -k\mathbf{v}$  и 2-му закону Ньютона

Формула Дарси (2), преобразованная к формуле (3) вертикального уклона, в дальнейшем была *низведена* до откровенно одномерной формулы

$$w = -\chi \frac{d}{dz} \left( \frac{p}{\rho g} + z \right),$$

введенной только для одной вертикальной компоненты скорости, волон- арно перенесена на пространственную фильтрацию со скоростью  $\mathbf{v} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$  и записана в качестве “**закона Дарси**” [1]:

$$\mathbf{v} = -\chi \nabla \left( \frac{P}{\rho g} + z \right) \quad (1.1)$$

Необходимо отметить, что формулу (1) Дарси использовал в расчетах дренажа. Поэтому применение в инженерной практике данной формулы для грубого подсчета вертикального расхода жидкости в грунте вполне было допустимо, в то время как обобщение (1.1) для пространственной фильтрации вступает в **противоречие с законами физики** и сталкивается с **проблемой постановки адекватных процессу фильтрации граничных условий для давления и скорости**.

В дальнейшем была предпринята попытка дать обоснование “закону Дарси” (1.1), используя уравнение динамики вязких сред

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \nabla p = \mu \Delta \mathbf{v} + \rho \mathbf{F}, \quad (1.2)$$

в котором ускорение приравнено к нулю

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = 0 \quad (1.3)$$

В результате уравнение Навье (1.2) нивелируется до уравнения Стокса для “ползущих движений” [4-5]:

$$\nabla p = \mu \Delta \mathbf{v} + \rho \mathbf{F} \quad (1.4)$$

**Гипотеза (Полубаринова-Кочина П.Я.[1])**, что в грунте, состоящем из твердых частиц, можно применить формулу трения  $\mathbf{F}_{mp} = -k\mathbf{v}$  при скольжении твердых тел, по которой силы вязкого трения в уравнениях Навье (1.2) предполагаются пропорциональными скорости

$$\mu \Delta \mathbf{v} = -k\mathbf{v}$$

В результате “закон Дарси” (1.1) оформлен из 2-х уравнений [1].

Уравнения динамики

$$k\mathbf{v} = -\text{grad}p + \rho \mathbf{F}, \quad (1.5)$$

и уравнения неразрывности несжимаемых жидкостей

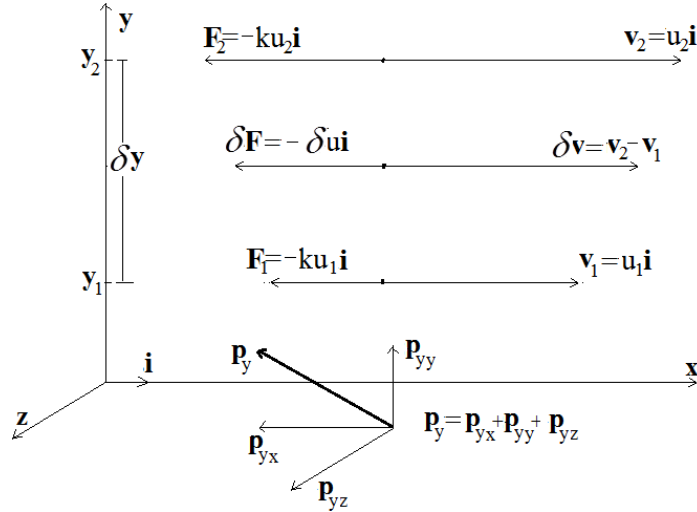
$$\text{div} \mathbf{v} = 0 \quad (1.6)$$

Фальшивость гипотезы и уравнения (1.5) установлена в следующей теореме.

**Теорема.** Уравнение динамики (1.5) «закон Дарси» противоречит закону трения  $\mathbf{F}_{mp} = -k\mathbf{v}$  и второму закону Ньютона.

**Доказательство.** В самом деле, на каждую частицу  $m_i$ , движущуюся со скоростью  $\mathbf{v}_i$  действует сила трения  $\mathbf{F}_{mpi} = -k\mathbf{v}_i$ , поэтому в индивидуальном объеме  $\delta\tau$  среднемассовая сила трения по определению равна

$$\mathbf{F}_{mp} = \sum_i \mathbf{F}_{mpi} m_i / \sum_i m_i = - \sum_i k\mathbf{v}_i m_i / \sum_i m_i = -k\mathbf{v}, \quad \mathbf{F}_{mp} = -k\mathbf{v}$$



Пусть течение вязкой жидкости происходит со скоростью  $\mathbf{v} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$  так, что  $u > 0$ . Сила трения  $\mathbf{F}_{mp} = -k\mathbf{v}$  есть сумма разложений по осям  $\mathbf{F}_{mp} = \mathbf{F}_{(x)} + \mathbf{F}_{(y)} + \mathbf{F}_{(z)}$ . Поэтому на плоскости  $y_1$  сила трения  $\mathbf{F}_{(x)}$  равна  $\mathbf{F}_1 = -ku_1\mathbf{i}$ , на плоскости  $y_2 = y_1 + \delta y$ ,  $\delta y > 0$   $\mathbf{F}_2 = -ku_2\mathbf{i}$ . Образуются приращения сил и скоростей:  $\delta\mathbf{F} = \mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_1$ ,  $\delta u = u_2 - u_1 > 0$ ,  $\delta\mathbf{F} = -k\delta u\mathbf{i}$ ,  $\delta\mathbf{F} \uparrow\downarrow \mathbf{i}$ . Вводится линейная плотность  $\mathbf{f} = \frac{\delta\mathbf{F}}{\delta y}$ ,  $\delta\mathbf{F} = \delta y\mathbf{f}$ . По определению средний вектор касательного напряжения  $\mathbf{p}_{yxcp} = \delta\mathbf{F} / \delta\sigma$ ,  $\delta\sigma = \delta x\delta z$  параллелен и одинаково направлен с силами трения  $\mathbf{p}_{yxcp} \uparrow\uparrow \delta\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{p}_{yxcp} \uparrow\uparrow \mathbf{f}$ .

Коэффициент пропорциональности приводит к равенствам  $\mathbf{f} = k'\mathbf{p}_{yxcp}$ ,  $k' > 0$ ,  $\mathbf{p}_{yxcp} \uparrow\downarrow \mathbf{i}$ ,  $k'\mathbf{p}_{yxcp}\delta y = -k\delta u\mathbf{i}$ .

Скалярное произведение на орт  $\mathbf{i}$ :  $k'\mathbf{p}_{yxcp}\delta y \cdot \mathbf{i} = -k\delta u\mathbf{i} \cdot \mathbf{i}$ .

В результате получаются

$$k'\mathbf{p}_{yxcp} \cdot \mathbf{i}\delta y = k'|\mathbf{p}_{yxcp}||\mathbf{i}|\delta y \cos 180^\circ = k'p_{yxcp} \cdot 1 \cdot \delta y \cdot (-1) = -k'p_{yxcp}\delta y,$$

$$-k\delta u\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = -k\delta u|\mathbf{i}||\mathbf{i}| \cdot \cos 0^\circ = -k\delta u \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = -k\delta u$$

Из равенств  $-k'p_{yxcp}\delta y = -k\delta u$ ,  $p_{yxcp} = \frac{k}{k'} \frac{\delta u}{\delta y}$  в пределе вытекает закон трения

Ньютона  $p_{yx} = \lim_{\delta y \rightarrow 0} \frac{k}{k'} \frac{\delta u}{\delta y} = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$ ,  $\mu = \frac{k}{k'}$ .

Обобщения полученной формулы путем перестановок индексов и переменных дают касательные напряжения по другим осям координат

$$p_{xy} = \mu \frac{\partial v}{\partial x}, p_{zx} = \mu \frac{\partial u}{\partial z}, p_{xz} = \mu \frac{\partial w}{\partial x}, p_{yz} = \mu \frac{\partial w}{\partial y}, p_{zy} = \mu \frac{\partial v}{\partial z}$$

Аналогично устанавливается формула вязкой составляющей  $\mathbf{p}_{xx}^0$  нормального напряжения  $\mathbf{p}_{xx} = -p\mathbf{i} + \mathbf{p}_{xx}^0$ . Пусть силы трения равны:  $\mathbf{F}_1 = -ku_1\mathbf{i}$  на плоскости  $x_1$  и  $\mathbf{F}_2 = -ku_2\mathbf{i}$  на плоскости  $x_2 = x_1 + \delta x$ ,  $\delta\mathbf{F} = \mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_1$ ,  $\delta\mathbf{F} = -k\delta u\mathbf{i}$ ,  $\delta u = u_2 - u_1 > 0$ , при этом  $\delta\mathbf{F} \uparrow\downarrow \mathbf{i}$ . Образуется линейная плотность силы  $\mathbf{f} = \delta\mathbf{F} / \delta x$ ,  $\delta\mathbf{F} = \delta x \mathbf{f}$ . По определению средний вектор нормального вязкого напряжения  $\mathbf{p}_{xxcp}^0 = \delta\mathbf{F} / \delta\sigma$ ,  $\delta\sigma = \delta y \delta z$  параллелен и одинаково направлен с силами трения  $\mathbf{p}_{xxcp}^0 \uparrow\uparrow \delta\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{p}_{xxcp}^0 \uparrow\uparrow \mathbf{f}$ . Коэффициент пропорциональности образует равенства  $\mathbf{f} = k'\mathbf{p}_{xxcp}^0$ ,  $k' > 0$ ,  $\mathbf{p}_{xxcp}^0 \uparrow\downarrow \mathbf{i}$ ,  $k'\mathbf{p}_{xxcp}^0 \delta x = -k\delta u\mathbf{i}$ .

Необходимо скалярное умножение на орт:  $k'\mathbf{p}_{xxcp}^0 \delta x \cdot \mathbf{i} = -k\delta u\mathbf{i} \cdot \mathbf{i}$ .

В результате получаются

$$k'\mathbf{p}_{xxcp}^0 \cdot \mathbf{i} \delta x = k' \left| \mathbf{p}_{xxcp}^0 \right| \left| \mathbf{i} \right| \delta x \cos 180^\circ = k' p_{xxcp}^0 \cdot 1 \cdot \delta x \cdot (-1) = -k' p_{xxcp}^0 \delta x,$$

$$-k\delta u\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = -k\delta u \left| \mathbf{i} \right| \left| \mathbf{i} \right| \cdot \cos 0^\circ = -k\delta u \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = -k\delta u$$

Равенства  $-k' p_{xxcp}^0 \delta x = -k\delta u$ ,  $p_{xxcp}^0 = \frac{k}{k'} \frac{\delta u}{\delta x}$ , в пределе дают вязкий член

нормального напряжения  $p_{xx}^0 = \lim_{\delta y \rightarrow 0} \frac{k}{k'} \frac{\delta u}{\delta x} = \mu \frac{\partial u}{\partial x}$ .

Обобщения полученной формулы перестановками нижних индексов дают соответствующие нормальные напряжения  $p_{yy}^0 = \mu \frac{\partial v}{\partial y}$ ,  $p_{zz}^0 = \mu \frac{\partial w}{\partial z}$ .

Полные нормальные напряжения являются суммой давления и вязких составляющих

$$p_{xx} = -p + p_{xx}^0 = -p + \mu \frac{\partial u}{\partial x}, p_{yy} = -p + p_{yy}^0 = -p + \mu \frac{\partial v}{\partial y}, p_{zz} = -p + p_{zz}^0 = -p + \mu \frac{\partial w}{\partial z},$$

т.е. индексной записи имеем напряжения  $p_{ji} = -p\delta_{ji} + \mu \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ , подставляя которые в

уравнение динамики сплошной среды напряжениях

$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{v} \left( \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} \right) = \rho \mathbf{F} + \frac{\partial \mathbf{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{p}_z}{\partial z}$  выводим уравнения, соответствующие закону

трения  $\mathbf{F}_{mpi} = -k\mathbf{v}_i$ :

$$\rho \frac{dv_i}{dt} + v_i \left( \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) + \rho F_i, i, j = 1, 2, 3$$

Данное уравнение по концепциям «закона Дарси» (1.3) (ускорение равно нулю  $\frac{dv_i}{dt} = 0$  и несжимаемая жидкость (1.6)) упрощается :

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) + \rho F_i, i, j = 1, 2, 3 \quad (1.7)$$

Полагая  $\mu = const$ ,  $\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = \mu \Delta v_i$ , скалярные уравнения (1.7) переписываем в векторное уравнение

$$-\mu \Delta \mathbf{v} = -grad p + \rho \mathbf{F},$$

которое, очевидно, **не совпадает** с уравнением динамики «закона Дарси»

$$k\mathbf{v} = -grad p + \rho \mathbf{F}, \quad (1.8)$$

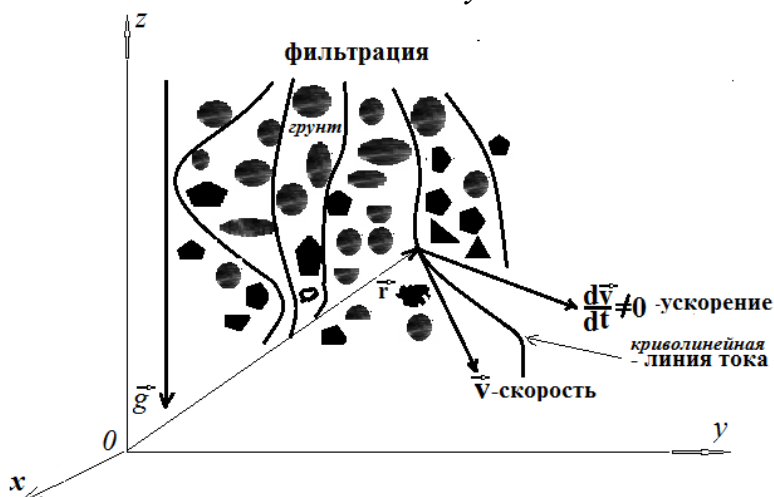
так как по логике вывода  $-\mu \Delta \mathbf{v} \neq k\mathbf{v}$ ! Таким образом, уравнение (1.8) «закона Дарси» **фальшивое**. Что требовалось доказать.

Уравнение (1.2) является аналогом 2-го закона Ньютона, записанного в единице объема,

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + u \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + v \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + w \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \right) + \nabla p = \mu \Delta \mathbf{v} + \rho \mathbf{F},$$

согласно чему в модели (1.5), (1.6) получается, что при фильтрации по «закону Дарси» ускорения частиц жидкости

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + u \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + v \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + w \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} = 0$$



равны нулю, следовательно, скорости  $\mathbf{v} = const$  есть постоянные векторы и по первому закону Ньютона частицы жидкости должны двигаться по **прямолинейным траекториям**.

На рисунке показано обтекание жидкостью частиц грунта по криволинейным траекториям, что неизбежно создает центростремительную составляющую ускорения, в силу чего ускорение не

равно нулю  $\frac{d\mathbf{v}}{dt} \neq 0!!!$

**Фальшивость** применений уравнения Стокса «ползущих движений» (1.4) и уравнения (1.5) «закона Дарси» для расчетов многомерных течений при переменных скоростях  $\mathbf{v} \neq const$  полностью доказана, ибо не выполняется второй закон Ньютона.



## 2. Проблемы постановки граничных условий

Сложность постановки граничных условий, адекватных моделируемому физическому процессу фильтрации, уже видна из одномерных уравнений «закона Дарси». В самом деле, система уравнений (1.5), (1.6)

$$k\mathbf{v} = -\text{grad}p + \rho\mathbf{F}, \quad \text{div}\mathbf{v} = 0$$

в течениях параллельно оси  $z$  со скоростью  $\mathbf{v} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + w\mathbf{k}$  в проекции на ось  $z$  приводится к уравнениям

$$kw = -\frac{dp}{dz} - \rho g, \quad \frac{dw}{dz} = 0$$

Из данного уравнения вытекает постоянство скорости  $w = \text{const}$ . Для определения  $\text{const}$  необходимо и достаточно задать скорость в одной точке  $w(z_0) = w_0 = \text{const}$ .

В данном случае для вычисления давления из первого уравнения

$$kw_0 = -\frac{dp}{dz} - \rho g,$$

тоже достаточно задать его значение в одной точке и решение есть

$$p(z) = p(z_0) - (kw_0 + \rho g)(z - z_0)$$

**Факт постоянства скорости в одномерном течении и линейное распределение давления является доказательством абсурдности перевода одномерной дренажной формулы Дарси (1) на пространственную векторную формулу (1.1), присвоив название «закона Дарси».**

В декартовой системе уравнения «закона Дарси» имеют вид:

$$ku = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho F_x, \quad kv = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho F_y, \quad kw = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho F_z, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.2)$$

Проблемы постановки граничных условий для уравнений “закона Дарси” вытекают из того, что в (1.5), (1.6) входят только **первые производные** от искомых функций  $u, v, w, p$ . Поэтому, для  $u$  и  $p$  должны быть поставлены **по одному граничному условию** на линиях, параллельных оси  $x$ , для  $v$  и  $p$  - **по одному граничному условию** на линиях, параллельных оси  $y$ , для  $w$  и  $p$  - **по одному граничному условию** на линиях, параллельных оси  $z$ , т.е. только на отдельных участках границы исследуемой области течения, а не на всей границе в целом.

По теореме Остроградского – Гаусса  $\iiint_{\tau} \text{div}\mathbf{v}d\tau = \iint_{\sigma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}d\sigma$  из уравнения неразрывности (1.6) вытекает жесткое условие на граничные значения компонент скорости

$$\iint_{\sigma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}d\sigma = 0 \quad (2.3)$$

## 3. Граничные условия Дирихле и Неймана

Проблема постановки граничных условий усложняется уже для двумерных уравнений, не говоря о трехмерных:

$$ku = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho F_x, \quad kw = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho F_z, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.2)$$

Ради простоты рассуждений границу  $\sigma$  плоской области  $\tau$  выберем в виде прямоугольника. По вышесказанному, если на участке границы  $\sigma_1$  задано граничное условие  $u|_{\sigma_1} = \varphi_1$ , и на участке границы  $\sigma_2$  задано  $w|_{\sigma_2} = \varphi_2$ , то в силу вхождения в уравнения (3.1) первых производных от давления  $\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial z}$  должны быть заданы граничные условия на противоположных участках границы  $\sigma_3, \sigma_4$  в виде (рис.1)  $p = \lambda$  и  $p = q$ .

Практикуемая до сих пор методика решения уравнений (1.5), (1.6) использует уравнение эллиптического типа

$$\operatorname{div} \frac{1}{k} (\operatorname{grad} p - \rho \mathbf{F}) = 0, \quad (3.3)$$

что является следствием подстановки (1.5) в (1.6). Интеграл по области  $\tau$  от обеих частей (3.3) приводит к равенству

$$\iiint_{\tau} \operatorname{div} \frac{1}{k} (\operatorname{grad} p - \rho \mathbf{F}) d\tau = \iint_{\sigma} \frac{1}{k} (\operatorname{grad} p - \rho \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} d\sigma = 0 \quad (3.3')$$

Таким образом, для двумерного уравнения (3.3) в силу связи (3.1) граничными условиями будут

$$\begin{aligned} \left(-\frac{\partial p}{\partial x} + \rho F_x\right)|_{\sigma_1} = k\varphi_1, \quad \left(-\frac{\partial p}{\partial z} + \rho F_z\right)|_{\sigma_2} = k\varphi_2, \\ p|_{\sigma_3} = q, \quad p|_{\sigma_4} = \lambda \end{aligned} \quad (3.4)$$

Решая краевую задачу (3.3), (3.4) относительно давления  $p$ , компоненты скорости вычисляют из (3.1):

$$u = \left(-\frac{\partial p}{\partial x} + \rho F_x\right) / k, \quad w = \left(-\frac{\partial p}{\partial z} + \rho F_z\right) / k \quad (3.5)$$

во всей области  $\tau$ , в том числе на участках  $\sigma_3, \sigma_4$  границы.

Ставится вопрос: удовлетворяют ли полученные в результате решения краевой задачи (3.3), (3.4) значения компонент скорости условию (2.3), которое для плоской области  $\tau$  является одномерным интегралом в данном случае  $\sigma$  - кривая, ограничивающая  $\tau$ ?

$$\begin{aligned} \uparrow_z \sigma_4 \quad p = \lambda \\ u|_{\sigma_1} = \varphi_1 \\ p = q \\ \sigma_1 \quad \sigma_3 \\ w|_{\sigma_2} = \varphi_2 \\ \sigma_{2,x} \Rightarrow \end{aligned}$$

Рисунок 1

#### 4. Граничные условия типа Неймана

На той же двумерной задаче рассмотрим постановку граничных условий Неймана на участках  $\sigma_3$  и  $\sigma_4$  границы, на  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  они уже имеются:

$$\left(-\frac{\partial p}{\partial x} + \rho F_x\right)\Big|_{\sigma_1} = k\varphi_1, \left(-\frac{\partial p}{\partial z} + \rho F_z\right)\Big|_{\sigma_2} = k\varphi_2, \quad (4.1)$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\Big|_{\sigma_3} = \varphi_3, \left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)\Big|_{\sigma_4} = \varphi_4 \quad (4.2)$$

По закону Дарси (1.5), из краевых условий (4.2) вытекает, что на участках  $\sigma_3$  и  $\sigma_4$  границы скорости равны

$$u\Big|_{\sigma_3} = (-\varphi_3 + \rho F_x)/k, w\Big|_{\sigma_4} = (-\varphi_4 + \rho F_z)/k \quad (4.3)$$

Таким образом, граничные значения

$$\varphi_1, \varphi_2, (-\varphi_3 + \rho F_x)/k, (-\varphi_4 + \rho F_z)/k$$

должны быть таковыми, чтобы выполнялось условие (2.3). Кроме того, должно быть выполнено условие разрешимости (3.3') с учетом граничных условий (4.1), (4.2).

**Парадокс** применения "закона Дарси" в виде многомерной задачи (1.5), (1.6) заключается в том, что в силу уравнения неразрывности (3.2) для  $u$  достаточно одного граничного условия

$u\Big|_{\sigma_1} = \varphi_1$ , а из-за (4.3) имеет место второе граничное условие  $u\Big|_{\sigma_3} = (-\varphi_3 + \rho F_x)/k$ , что является излишним, так как уравнение (3.2) первого порядка по  $x$ , аналогичная ситуация возникает

и для  $w$ : два краевых условия  $w\Big|_{\sigma_2} = \varphi_2$ ,  $w\Big|_{\sigma_4} = (-\varphi_4 + \rho F_z)/k$ , ибо в уравнении

неразрывности (3.2) стоит производная  $\frac{\partial w}{\partial z}$ , и такая же ситуация лишних краевых условий для

компонент скорости возникает в трехмерных задачах.

Ясно, что граничное условие Неймана

$$\frac{\partial p}{\partial n}\Big|_{\sigma} = \text{grad}p \cdot \mathbf{n} = \psi$$

должно удовлетворять согласно (3.3) критерию разрешимости

$$\iint_{\sigma} \frac{1}{k} (\text{grad}p - \rho \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} d\sigma = 0, \iint_{\sigma} \left(\frac{1}{k} \text{grad}p \cdot \mathbf{n} - \frac{1}{k} \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\right) d\sigma = 0,$$

и равенству

$$\iint_{\sigma} \frac{1}{k} (\text{grad}p - \rho \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} d\sigma = \iint_{\sigma} \left(\frac{1}{k} \psi - \frac{1}{k} \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\right) d\sigma = 0$$

#### 5. Парадоксы уравнений «закона Дарси» (1.5), (1.6).

**Фальшивость уравнения неразрывности в «законе Дарси»**

**Первый парадокс:** уравнения «закона Дарси» (1.5), (1.6) в консервативном поле сил описывает безвихревое (потенциальное) течение.

Вычислим циркуляцию вектора скорости  $\int_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$  по произвольному контуру  $\Gamma$ , которая в теории фильтрации по «закону Дарси» (1.5), (1.6) равна:

$$\int_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma} \frac{1}{k} (\text{grad}p - \rho \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{r} \quad (5.1)$$

Пусть течение происходит под действием консервативных сил тяжести

$$\mathbf{F} = -\text{grad}\Pi, \quad (5.2)$$

$\Pi$  – потенциальная энергия.

В данном случае подынтегральное выражение в (5.1) равно

$$\frac{1}{k} (-\text{grad}p + \rho \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{k} \left( -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \Pi \right) \rho d\mathbf{r} = -\frac{\rho}{k} d\left(\frac{p}{\rho} + \Pi\right) \quad (5.3)$$

Для постоянных  $\rho = \text{const}$ ,  $k = \text{const}$  интеграл по замкнутому контуру в правой части (5.1) равен нулю:

$$\int_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma} \frac{1}{k} (\text{grad}p - \rho \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{r} = -\frac{\rho}{k} \iint_{\Gamma} d\left(\frac{p}{\rho} + \Pi\right) = 0 \quad (5.4)$$

В результате из (5.1) для потенциальных сил получается равенство нулю циркуляции вектора скорости по любому замкнутому контуру

$$\int_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad (5.5)$$

Совершается переход к поверхностному интегралу по теореме Стокса

$$\int_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{rot} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds = 0 \quad (5.6)$$

Здесь  $S$  – произвольная поверхность, натянутая на контур  $\Gamma$ . По лемме Дюбуа-Раймонда из (5.6) вытекает равенство нулю вихря (ротора) скорости

$$\text{rot} \mathbf{v} = 0 \quad (5.7)$$

во всей области течения.

Другое доказательство равенства (5.7) вытекает из тождества

$$\text{rot} \mathbf{v} = -\frac{1}{k} \text{rot} \text{grad} \left( \frac{p}{\rho} + \Pi \right) = 0$$

Течения, в которых вихрь скорости всюду равен нулю  $\text{rot} \mathbf{v} = 0$ , как известно, являются *потенциальными течениями идеальных жидкостей* [4]. Потенциал скорости для двумерных течений рассмотрен П.Я.Полубариной-Кочинной в [1]. В той же книге [1] признается, что силы сопротивления, которые испытывает частица жидкости в поре, **зависят от внутреннего трения жидкости. Внутреннее трение – неотъемлемое свойство вязких жидкостей, в вязких жидкостях потенциальные течения невозможны, ротор скорости отличен нуля  $\text{rot} \mathbf{v} \neq 0$ .**

**Второй парадокс:** уравнение «закона Дарси» (1.5) противоречит закону сохранения энергии.

Потенциал скорости  $\Phi$  вводится известной формулой

$$\mathbf{v} = \text{grad} \Phi \quad (5.8)$$

Подставляя (5.2) и (5.8) в уравнение (1.5) закона Дарси, найдем

$$\text{grad}(k\Phi + p + \rho\Pi) = 0, \quad (5.9)$$

откуда вытекает интеграл

$$(k\Phi + p + \rho\Pi) = \text{const}, \quad (5.10)$$

где *const* одна и та же для всей области течения. С другой стороны, для стационарных безвихревых течений идеальных жидкостей имеет место интеграл Лагранжа-Коши [4]:

$$\frac{|\mathbf{v}|^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \Pi = \text{const} \quad (5.11)$$

Очевидно из (5.10) не получается интеграл Лагранжа-Коши. Приравнивание *const* в (5.10) и (5.11), приводит к парадоксальному равенству в “законе Дарси”

$$k\Phi = \rho \frac{|\text{grad}\Phi|^2}{2} \quad (5.12)$$

Парадоксальность (5.12) связана с тем, что потенциал скорости  $\Phi$  определяется с точностью до произвольной константы, а  $\text{grad}\Phi$  эту константу игнорирует.

Нетрудно видеть, что интеграл Лагранжа-Коши (5.11) выражает закон сохранения механической энергии в единице объема сплошной среды.

В течениях же по “закону Дарси” получается интеграл (5.10).

**Очевидно, что интеграл (5.10) «закона Дарси» противоречит закону сохранения энергии (5.12).**

**Третий парадокс: уравнение «закона Дарси» (1.5) противоречит теореме Мещерского (закону изменения импульса) или второму закону Ньютона.**

Основной закон динамики  $\frac{dm\mathbf{v}}{dt} = \sum_k \mathbf{f}_k$  гласит, что силы  $\sum_k \mathbf{f}_k$  по теореме Мещерского вызывают изменение импульса  $m\mathbf{v}$ .

Продифференцировав, можно представить закон в виде

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{v} \frac{dm}{dt} = \sum_k \mathbf{f}_k$$

**Всякое** движение материальной среды в ньютоновской механике подчиняется теореме Мещерского, следовательно, и движение в грунте, должно подчиняться данному закону.

**Таким образом, из теоремы Мещерского следуют 2 факта. Первый факт: в “законе Дарси” ускорение равно нулю  $\frac{d\mathbf{v}}{dt} = 0$ .**

**Но тогда по первому закону Ньютона частицы должны совершать прямолинейные движения с постоянными скоростями, что возможно только в одномерном течении по направлению оси “z”, или покоиться.**

В гидродинамике наглядной иллюстрацией таких **прямолинейных** стационарных течений, в которых **ускорение равно нулю**, являются течение Куэтта, течение Пуазейля между параллельными плоскостями с зазором  $h$ :  $u = -\frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} (h^2 - y^2)$ , течение Хагена-Пуазейля в

трубе радиуса  $b$  и др.

$$[4]: v_z = -\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dz} (b^2 - r^2).$$

Возможно, что Дарси они были известны и положив, соответственно,

$$k = c \rho \alpha \left( \frac{2\mu}{h^2 - y^2} \right), k = c \rho \alpha \left( \frac{4\mu}{b^2 - r^2} \right),$$

инженер Дарси применил готовые формулы для расчета дренажа.

**Второй факт из теоремы Мещерского просто необходим в моделировании фильтрации - закон сохранения массы в фильтрационных течениях должен учитывать мощности стоков (потери) и источников (прибыли):**

$$\frac{dm}{dt} = J, \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = J \quad (*)$$

Для несжимаемой жидкости получается  $\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{J}{\rho}$ , что доказывает фальшивость уравнения

неразрывности (1.6) в «законе Дарси», ибо в одномерной фильтрации уравнение  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$  превращается в равенство  $\frac{dw}{dz} = 0$ , откуда следует постоянство скорости  $w = \text{const} = w_0$ ,

что абсурдно в грунтовых течениях.

В силу всего этого применение «закона Дарси» (1.5), (1.6) для расчетов двумерных и трехмерных течений теряет физический смысл из-за противоречия с первым законом Ньютона, как только в течении возникают криволинейные линии тока. Прямолинейности линий тока может и не быть из-за указанных выше парадоксов с граничными условиями.

Приравнивание к нулю ускорения

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + u \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + v \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + w \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} = 0$$

оправдывается следующими соображениями [1]. *Первое:* в стационарном течении частная производная по времени равна нулю  $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0$ , но для нестационарного течения локальное

ускорение не равно нулю  $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \neq 0$ , и предпринятая в монографии [1] попытка приравнивания его к

нулю не выдерживает строгой критики. *Второе:* что произведения в конвективном переносе

$u \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + v \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + w \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}$  ничтожно малы. Стационарность фильтрации, наверное, не всегда имеет

место из-за действия внешних условий, а произведения в  $u \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + v \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + w \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}$  могут быть вовсе

не малыми. Покажем этот факт для одной формулы переноса, например,  $w \frac{dw}{dz}$ .

Пусть  $w = \varepsilon F(\cos \alpha z)$ , где  $\alpha = \text{const} \gg 1$  очень большое конечное число,  $\varepsilon$  - параметр, обеспечивающий малость функции  $w$ ,  $F$ - ограниченная вместе с производной дифференцируемая функция. Производная равна  $\frac{dw}{dz} = -\varepsilon F' \alpha \sin \alpha z$ . **Поэтому произведение**

$w \frac{dw}{dz} = -\alpha \varepsilon^2 F F' \sin \alpha z$  **есть конечное число, достаточно положить  $\alpha = \text{const} * \varepsilon^{-2}$ .**

Аналогичных примеров можно привести достаточное количество, например, функции со слабыми разрывами, чтобы убедиться в том, что **приравнивание к нулю ускорения** в теории фильтрации

нефизично, поэтому ошибочно. **Нефизично из-за противоречия с основным законом динамики – именно, со вторым законом Ньютона, который гласит: действие силы вызывает ускорение**

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} \neq 0.$$

Как было отмечено в (3.3), распространенным методом решения уравнений (1.5), (1.6) «закона Дарси» является сведение системы к одному уравнению эллиптического типа

$$\operatorname{div} \frac{1}{k} \operatorname{grad} p = \operatorname{div} \rho \mathbf{F}$$

при указанных выше краевых условиях.

Надо признать, что **важнейшим критерием верности** полученного решения уравнения (3.3) является то, что для вектора скорости, определенного по формуле (1.5) «закона Дарси», должно выполняться не только условие (2.3), но в первую очередь равенство нулю ускорения

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + u \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + v \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + w \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} = 0,$$

т.е. давление в стационарной фильтрации должно удовлетворять уравнению, вытекающему из

$$\begin{aligned} \text{данного равенства: } & \left(-\frac{\partial p}{\partial x} + \rho F_x\right) \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{k}(-\nabla p + \rho \mathbf{F})\right] + \left(-\frac{\partial p}{\partial y} + \rho F_y\right) \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{k}(-\nabla p + \rho \mathbf{F})\right] + \\ & + \left(-\frac{\partial p}{\partial z} + \rho F_z\right) \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{k}(-\nabla p + \rho \mathbf{F})\right] = 0, \nabla \equiv \operatorname{grad} \end{aligned} \quad (5.13)$$

во всех точках фильтрации, что не является автоматическим следствием решения уравнений (1.5), (1.6), как это имеет место в течениях Куэтта, Пуазейля между параллельными плоскостями, Хагена-Пуазейля в трубе, где ускорения тождественно равны нулю [4].

Получается **четвертый парадокс**: давление в «закона Дарси» (1.5), (1.6) определяется как решение уравнения (3.3), с другой стороны, согласно первому и второму законам Ньютона, давление должно быть еще решением системы из трех проекций векторного уравнения (5.13).

Итого, для одной функции давления  $p$  возникает 4 уравнения, что еще раз показывает **абсурдность** и **фальшивость** применения уравнений «закона Дарси» (1.5), (1.6) в многомерной фильтрации.

## 6. Включение стоков и источников массы в уравнение неразрывности необходимо для выполнения закона изменения импульса (теорема Мещерского) в одномерной фильтрации. Естественные уравнения пространственной фильтрации

Рассмотрим одномерное стационарное течение параллельно направлению силы тяжести  $\mathbf{g}$  идеальной несжимаемой жидкости с компонентами скорости  $u=0, v=0, w \neq 0$ :

$$\rho w \frac{dw}{dz} + w \frac{d\rho w}{dz} = -\frac{dp}{dz} - \rho g \quad (6.1)$$

Данное уравнение есть проекция на ось “z” стационарного уравнения Эйлера

$$\rho \left( u \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + v \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + w \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \right) + \mathbf{v} \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = -\nabla p + \rho \mathbf{F}$$

Далее, учитывая фильтрацию в грунте, в законе сохранения массы введем мощность источника или стока в виде

$$\operatorname{div} \rho \mathbf{v} = J, \rho = \text{const}, \rho \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = J \quad (6.2)$$

Данное уравнение в случае одномерного течения  $u=0, v=0, w \neq 0$  приводится к виду

$$\rho \frac{dw}{dz} = J \quad (6.3)$$

Подставляя (6.3) в (6.1), найдем

$$wJ + wJ = -\frac{dp}{dz} - \rho g \quad (6.4)$$

Обозначая  $k = 2J$  получаем формулу (3).

Таким образом, в исходной дренажной формуле инженера Дарси (3) выполняется теорема Мещерского, то есть ускорение не равно нулю, если в законе сохранения массы есть источники и стоки массы!!!

Творцы пространственных уравнений под наименованием «закон Дарси» использовали фальшивое уравнение неразрывности (1.6)  $div \mathbf{v} = 0$ , поэтому все расчеты, выполненные с применением уравнений (1.5) и (1.6) являются априори фальшивыми!

Доказанная выше теорема и применения закона сохранения массы (\*) в виде (6.2), (6.3) являются физическими и теоретическими обоснованиями того факта, что в моделировании фильтрации надо исходить из уравнений Навье

$$\rho \frac{dv_i}{dt} + v_i J = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{k}{k'} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) + \rho F_i, i, j = 1, 2, 3,$$

и уравнения неразрывности с учетом стоков и источников массы

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div \rho \mathbf{v} = J$$

**Примечание.** В уравнениях Навье в сплошном потоке вязкой жидкости используется динамическая вязкость  $\frac{k}{k'} = \mu$ .

### 7. Включение в уравнения коэффициента пористости среды.

Пористость грунта естественным образом влияет на определение коэффициента трения. Частицы жидкости при движении в грунте с коэффициентом пористости  $0 < s < 1$  испытывают торможение от соприкосновения с твердыми частицами грунта, что значительно увеличивает силу

трения  $\mathbf{F}_{mp} = -\frac{k}{s} \mathbf{v}$ .

В результате изложенный выше вывод уравнений динамики для пористых сред принимает вид

$$\rho \frac{dv_i}{dt} + v_i J = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{k}{k'} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) + \rho F_i, i, j = 1, 2, 3, \frac{k}{k'} = \mu$$

Коэффициент пористости также учитывается в уравнении неразрывности

$$\frac{\partial s \rho}{\partial t} + div \rho \mathbf{v} = J$$

### Выводы

Уравнения «закон Дарси» для пространственной фильтрации являются фальшивыми, так как противоречат 2-му закону Ньютона, законам сохранения массы и энергии. Следовательно, фальшивыми являются результаты расчетов с применениями уравнений «закон Дарси».



**Теорема и закон сохранения массы (\*) (6.2), (6.3) являются физическими и теоретическими обоснованиями применения в теории фильтрации уравнений Навье в форме**

$$\rho \frac{dv_i}{dt} + v_i J = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\mu}{s} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) + \rho F_i, i, j = 1, 2, 3,$$

**и уравнения неразрывности с учетом стоков или источников массы**

$$\frac{\partial s \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = J$$

**Если фильтрация происходит под давлением  $p(x, y, z_0, t) = p_0$  на поверхности  $z = z_0$ , граничные условия должны быть заданы только для 2-х проекций скорости  $u(x, y, z_0, t) = u_0, v(x, y, z_0, t) = v_0$ , а третья компонента скорости вычисляется из**

**аппроксимации уравнения неразрывности** 
$$\frac{\partial \rho w}{\partial z} = J - \frac{\partial s \rho}{\partial t} - \frac{\partial \rho u}{\partial x} - \frac{\partial \rho v}{\partial y}.$$

Алгоритмы численной реализации данной модели изложены в [12], [20].

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод -М.: Изд-во "Наука", 1977г. С.664.  
 [2] Darcy H. Les fontaines publiques de la ville de Dijon. Paris, 1856.  
 [3] Джакупов К.Б. Генеалогии уравнений Стокса и Навье. Степенные реологические законы и уравнения // Известия НАН РК, сер.ф.-м., 3(313), май-июнь 2017г. с.64-80.ISSN 2518-1726.  
 [4] Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа.-М.: «Наука», 1973г. С.783.  
 [5] Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя.- М.: «Наука», 1974г.С.711.  
 [6] Аравин В.И. и Нумеров С.Н. Теория движения жидкостей и газов в недеформируемой пористой среде. - М.: Гостехиздат. 1953г. С.616.  
 [7] Nied D.A., Bejan A. Convection in Porous Media. N. Y. etc: Springer, 1992. 408p.  
 [8] Нумеров С.Н. О необходимости учета сил инерции в основных уравнениях теории фильтрации// В сб.: Вопр. прикладной математики и геометрического моделирования. Ленингр. инж.-стр. ин-т, 1962г., с.18-21.  
 [9] Hirt C.W. and Nichols B.D. Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries// J.Comput.Phys., 1981, Vol.39, pp.201-225.  
 [10] Jakupov K.B. RHEOLOGICAL LAWS OF VISCOUS FLUID DYNAMICS // Известия НАН РК, сер.физ.-мат., 1(293), январь-февраль 2014г. с.51-55. ISSN 1991-346X  
 [11] U.Piomelli. Large-eddy simulation: achievements and challenges // Progress in Aerospace Sciences 35 (1999) 335-362.  
 [12] Джакупов К.Б. Ликвидация фальсификаций и модернизация основ механики сплошной среды-А:Типография «Гылым Ордасы», 2017г. 439с  
 [13] Spalart P. R.: Strategies for turbulence modelling and simulations, Int.J. Heat Fluid Flow, 21, pp. 2, (2000).  
 [14] Джакупов К.Б. Моделирование термобародиффузий с химическими реакциями в жидкостях и газах // Известия НАН РК, серия физ.-мат., 6(310), ноябрь-декабрь 2016 г.с.80-88. ISSN 2518-1726.  
 [15] Egorov, Y, Menter, F.R. and Cokljat D.: Scale-Adaptive Simulation Method for Unsteady Flow Predictions. Part 2: Application to Aerodynamic Flows, companion paper, J. Flow Turbulence and Combustion, Vol. 85, No. 1.  
 [16] Джакупов К.Б. О  $k-\varepsilon$ , LES, Рейнольдси и степенных моделях // Известия НАН РК, серия физ.-мат.,1(311) январь-февраль 2017 г.с.144-159. ISSN 2518-1736.  
 [17] Menter, F.R., Egorov, Y, (2010): The Scale-Adaptive Simulation Method for Unsteady Turbulent Flow Predictions. Part 1: Theory and Model Description, J. Flow Turbulence and Combustion, Vol. 85, No. 1  
 [18] Jakupov K.B. About gipotese of Stokes and rheological laws. -Almaty "Gylym Ordasy", P.172.  
 [19] Strelets, M.: Detached Eddy Simulation of massively separated flows. AIAA Paper 2001-879, (2001).  
 [20] Джакупов К.Б. Коррекции теоретических парадоксов механики сплошной среды-А:Типография «Гылым Ордасы», 2015г. 416 с.

#### REFERENCES

- [1] Polubarinova-Kochina P.Ya. Theory of groundwater movement -M.: Publishing house "Science", 1977. 664p.  
 [2] H.Darcy. Les fontaines publiques de la ville de Dijon. Paris, 1856.  
 [3] Jakupov K.B. Genealogy of the Stokes and Navier equations. Degree rheological Laws and equations // Proceedings of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan, ser.f.-m., 3 (313), May-June 2017. p.64-80. ISSN 2518-1726.  
 [4] Loitsyansky LG Mechanics of fluid and gas.-M.: Nauka, 1973.

- [5] Schlichting G. The theory of the boundary layer .- М.: Nauka, **1974**, p.711.
- [6] Aravin V.I. And Numerov SN Theory of motion of liquids and gases In an undeformable porous medium. - Moscow: Gostekhizdat. **1953**. 616p.
- [7] Nied D.A., Bejan A. Convection in Porous Media. N. Y. etc: Springer, **1992**. 408p.
- [8] Numerov SN On the need to take into account the forces of inertia in the basic equations of the theory Filtration // In the collection: Vopr. Applied mathematics and geometric Modeling. Leningr. Ing.-P. In-t, **1962**, p.18-21.
- [9] C.W.Hirt and B.D.Nichols. Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries// J.Comput.Phys.,**1981**,Vol.39, pp.201-225.
- [10] Jakupov K.B. RHEOLOGICAL LAWS OF VISCOUS FLUID DYNAMICS // Izvestiya NAS of RK, ser.fiz.-mat., 1 (293), January-February **2014**. p.51-55. ISSN 1991-346X
- [11] U.Piomelli. Large-eddy simulation: achievements and challenges // Progress in Aerospace Sciences 35 (1999) 335-362.
- [12] Jakupov K.B. Elimination of falsifications and modernization of the foundations of mechanics of continuous-A: The printing house "The White Orders", **2017**. 439p.
- [13] Spalart P. R.: Strategies for turbulence modelling and simulations, Int.J. Heat Fluid Flow, 21, pp. 2, (**2000**).
- [14] Jakupov K.B. Modeling of thermobarodiffusion with chemical reactions in Fluids and gases // Izvestiya NAS RK, series of Physics and Mathematics, 6 (310), November-December. **2016** p.80-88. ISSN 2518-1726.
- [15] Egorov, Y, Menter, F.R. and Cokljat D.: Scale-Adaptive Simulation Method for Unsteady Flow Predictions. Part 2: Application to Aerodynamic Flows, companion paper, J. Flow Turbulence and Combustion, Vol. 85, No. 1.
- [16] Jakupov K.B. About, LES, Reynolds and power models // Izvestiya NAS RK, series of Physics and Mathematics, 1 (311) January-February **2017**, p.144-159. ISSN 2518-1736.
- [17] Menter, F.R., Egorov, Y, (2010): The Scale-Adaptive Simulation Method for Unsteady Turbulent Flow Predictions. Part 1: Theory and Model Description, J. Flow Turbulence and Combustion, Vol. 85, No. 1
- [18] Jakupov K.B. About gipoteze of Stokes and rheological laws. – Almaty: "Gylym Ordasy", 172p.
- [19] Strelets, M.: Detached Eddy Simulation of massively separated flows. AIAA Paper 2001-879, (**2001**).
- [20] Jakupov K.B. Corrections of theoretical paradoxes of mechanics continuous Wednesday-A: Typography "The White Ordas", **2015**. 416p.

#### К. Б. Жақып-тегі

ҚР БҒМ Математика және математикалық моделдеу институты, Алматы, Қазақстан

#### «Дарси ЗАҢЫНЫҢ» СҮЗГІ ТЕОРИЯСЫНДАҒЫ КОМПИЛЯТИВТІГІ

**Аннотация.** Кеңістік сүзгі теориясында «Дарси заңын» қолдануы репрезентативтік еместігінің мәселесі қойылған. Сығылмайтын тұтқырлы сұйықтықтың Навье теңдеулерінің көпөлшемелі «Дарси заңының» теңдеулеріне алмастырылғаны тыңғылықты жарықталған. «Дарси заңының» теңдеулері үйкеліс заңына және Ньютонның екінші заңына қарсы келетіндігі көрсетілген. Көпөлшемелі «Дарси заңының» теңдеулерінің сығылмайтын сұйықтықтардың дәрмендік (құйынсыз) ағыстарына сәйкес екендігі орнатылған, оның тұтқырлы сұйықтықтардың теориясына қарсы келетіндігі көрсетілген. «Дарси заңының» теңдеулері 1-ші дәрежелі туындылардан құрастырылғаны факт екені мәлімет, оның салдарынан шекаралық шарттар қоюда қайшыланған мәселелер шығатыны көрсетілген. «Дарси заңында» тек қана бір өлшемелі стационар ағыстарда физиканың үш заңы бірдей орындалады, егерде бірөлшемелі сүзуді идеалдық сұйықтықтардың Эйлер теңдеулерімен модельдесе және үзіліссіздік теңдеуінде массаның көлеммен уақыттың бірдіктерінде жоғалтуын немесе қосылуын ескерсе. Осыны негіздеп тұтқырлы сұйықтықтардың сүзілуін Навье теңдеулерімен модельдеу ұсынылған.

**Тірек сөздер:** сүзгі, қысым, жылдамдық, үдеу.

#### Сведения об авторе:

Джакупов Кенес Баженович - доктор физико-математических наук, профессор, академик РАН.

**Служебный адрес:** РГП Институт математики и математического моделирования КМ МОН РК, 050010, ул.Пушкина,125, г.Алматы, Казахстан.

## NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN  
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 6, Number 316 (2017), 131 – 138

**N.V. Gluschenko, I.D. Gorlachev, A.A. Zheltov,  
A.V. Kireev, K.M. Mukshev\*, A.V. Platov**

Institute of Nuclear Physics, Almaty, Kazakhstan

\*Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

### **AUTOMATION OF EXPERIMENTATION AT ACCELERATOR UKP-2-1**

**Abstract.** The control system of the electrostatic accelerator UKP-2-1 has been redesigned. As a result, the qualitative characteristics of the beam of accelerated ions have changed significantly. The conditions for carrying out the experiments were simplified. The accelerator setup time has significantly decreased. The accuracy of determining the beam parameters has increased, the probability of emergency situations has sharply decreased. It became possible to carry out experiments with cyclic switching of beam parameters or according to a predetermined program.

**Keywords:** experiment automation, electrostatic ion accelerator, ion-beam technologies, beam characteristics, beam parameters.

УДК 621.384.6; 001.89.004

**Н.В. Глущенко, И.Д. Горлачев, А.А. Желтов,  
А.В. Киреев, К.М. Мукашев\*, А.В. Платов**

Институт Ядерной Физики, Алматы, Казахстан

\*Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан

### **АВТОМАТИЗАЦИЯ ПРОВЕДЕНИЯ ФИЗИЧЕСКИХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ НА УСКОРИТЕЛЕ УКП-2-1**

**Аннотация.** Заново модернизирована система управления электростатическим ускорителем УКП-2-1. В результате существенно изменились качественные характеристики пучка ускоренных ионов. Упростились условия проведения экспериментов. Значительно сократилось время настройки ускорителя. Повысилась точность определения параметров пучка, резко снизилась вероятность аварийных ситуаций. Появилась возможность проведения экспериментов с циклическим переключением параметров пучка или по заранее заданной программе.

**Ключевые слова:** автоматизация эксперимента, электростатический ускоритель ионов, ионно-пучковые технологии, характеристики пучка, параметры пучка.

**Введение.** Электростатический ускоритель ионов УКП-2-1, созданный в середине 80-х годов, по ряду своих параметров является лучшим в своем классе на территории СНГ. На протяжении почти трех десятилетий ускоритель был востребованной установкой, на которой регулярно проводились исследовательские и прикладные работы. При этом каждая из этих работ требует индивидуальной настройки ускорителя в соответствии со стоящими перед исследователями задачами. Нередко на ускорителе ведется параллельно несколько разнородных работ, каждая из которых предъявляет свои собственные требования к ионному пучку. Точность выполнения этих требований и воспроизводимость режимов работы установки при повторной настройке определяют качество произведенных исследований, их конкурентоспособность и востребованность.

Некоторые виды работ, например ускорительная масс-спектрометрия, требуют многократной перестройки режимов ускорителя по заранее заданной программе, что невозможно без автоматизированной системы управления. Современная наука предъявляет строгие требования к качеству проведения работ на подобных установках [1-6], поэтому назрела необходимость частичной модернизации ускорителя в части его управления, контроля процессов, происходящих в ускорителе и качества ионного пучка.

Автоматизированная система управления и контроля электростатического ионного ускорителя (АСУУ) предназначена для повышения точности установки параметров ускорителя и получения повторяемости проводимых исследований и измерений, снижения себестоимости работ, повышение надежности и безаварийности установки. Основное назначение АСУУ - это гарантированное соблюдение потребительских характеристик пучка. Автоматизированы следующие процессы, выполняемые на ускорителе: запуск и настройка ускорителя, получение требуемых параметров пучка ионов, поддержание требуемых параметров в процессе работы, переключение режимов работы в случае необходимости, протоколирование и экспорт данных о состоянии ускорителя в процессе работы, предоставление конечным потребителям возможности управления выходными параметрами пучка ионов, калибровка ускорителя.

**Схема и принцип работы системы автоматизации.** Ускоритель УКП-2-1 выполнен по тандемной схеме с перезарядной мишенью (рисунок 1). Особенностью ускорителя является использование двух каналов ускорения с одним общим источником высокого напряжения. Ускоритель состоит из следующих систем: источник легких ионов, источник тяжелых ионов, канал инжекции тяжелых ионов, каскадный генератор, канал легких ионов, канал тяжелых ионов. Максимальное напряжение на каскадном генераторе типа Кокрофт-Уолтона 1 МВ. В качестве источника легких ионов используется дуоплазматрон, для получения тяжелых ионов используется многокатодный источник ионов с цезиевым распылением.

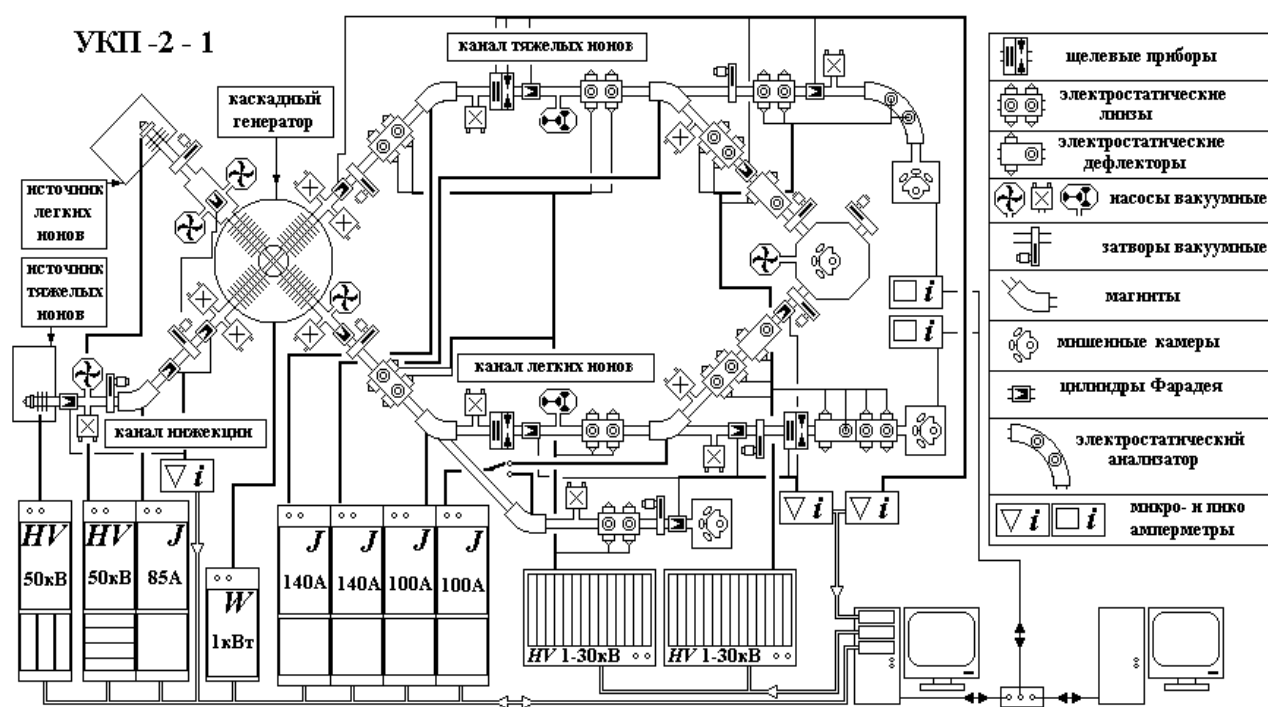


Рисунок 1 – Структура системы автоматизации

Для проведения автоматизации системы управления ускорительного комплекса необходимо было выбрать общую схему и стандарты, в рамках которых будет автоматизироваться установка. В качестве операционной системы для автоматизации была выбрана Windows Microsoft. ОС Windows не является общепринятой системой [1,2] при подобных работах, но выбор в её пользу был сделан

для возможности экспорта данных о работе установки в различные программы, работающих в среде Windows и широко используемых для обработки данных и вычислений [6,7]. Использование Windows также избавляет от необходимости дорогостоящего и узкоспециализированного обучения персонала установки для эффективной работы по обслуживанию и развитию программного обеспечения (ПО) системы автоматизации. Немаловажным фактором является себестоимость разрабатываемого ПО. Для разработки ПО системы автоматизации выбрана среда программирования LabVIEW [7,8] корпорации National Instruments. Предпочтение этой среде программирования отдано по причинам наличия и широкого использования большого количества библиотек, разработанных многими компаниями, кроме того большинство производителей модульных приборов предлагают готовые драйверы для своего оборудования в этой среде.

АСУУ выполнена единой, т.е. все объекты ускорителя управляются с одного рабочего места и имеют возможность программно взаимодействовать друг с другом. В системе использована двухуровневая структура:

- подсистема нижнего уровня предназначена для непосредственного взаимодействия с объектами управления. Она осуществляет выдачу управляющих сигналов, сбор данных о состоянии объектов, коррекцию управляющих сигналов, а также пересчет данных к реальным значениям в международной системе единиц СИ и передачу этих данных к подсистеме верхнего уровня в режиме реального времени без необходимости вмешательства оператора;

- подсистема верхнего уровня предназначена для настройки и управления ускорителя оператором. Она позволяет осуществлять выбор режима работы, загрузку и сохранение определенных режимов, визуализацию состояния ускорителя и прочие функции. Во избежание длительных задержек в процессе передачи данных, в качестве протокола взаимодействия между подсистемами использован протокол UDP.

При выборе общей схемы автоматизации основное внимание уделялось точности установки параметров ускорителя и их повторяемости при повторной настройке. Класс точности ускорителя определяется в первую очередь, точностью установки и поддержания энергии, тока и формы пучка ускоряемых ионов, а также способностью всех узлов ускорителя поддерживать заданный класс точности в процессе работы. Ускоритель имеет паспортную точность по энергии 0,05%. Изначально система управления отдельными узлами установки проектировалась исходя из этой цифры. При этом исполнительные устройства ускорителя, такие как каскадный генератор, высоковольтные источники, система питания магнитов и пр. позволяют получить гораздо более высокую точность – порядка 0,002%. В исходной схеме настройка аналоговых параметров ускорителя осуществлялась *установкой* опорного напряжения с использованием многооборотных потенциометров или *трансформаторов-вариактов*. При этом величина устанавливаемых параметров (кроме каскадного генератора) контролировалась по *стрелочным* приборам, имеющим точность не лучше 2%. Поэтому было решено заменить электромеханические источники *установки* на стандартные блоки цифро-аналоговых (ЦАП) и аналого-цифровых преобразователей (АЦП), управляемых от компьютера

**Аппаратная часть.** Для АСУУ используются два 16-канальных 16-разрядных АЦП модели NI6203PCI с паспортной точностью измерения 0,002%. Реально полученная точность измерения порядка 0,005%, что вызвано невысокой частотой выборки для этой модели. Кроме того на платах имеется по два 16-разрядных ЦАП, использованные для каналов управления, в которых требуется высокая разрядность. Для каналов управления, на требующих высокой разрядности, используется 32-канальный 12-разрядный ЦАП модели NI6732PCI с точностью установки 0,025%. Платы выполнены в стандарте PCI и установлены непосредственно в компьютер нижнего уровня, расположенный в пультовом зале ускорителя. Сигналы с плат подаются на кроссовую панель, на которой сведены все управляющие и контрольные сигналы ускорителя. Это позволяет получить доступ ко всем сигналам управления и контроля ускорителя в одном месте при настройке и ремонте системы управления. От кроссовой панели сигналы разводятся непосредственно к управляемым узлам или к местным кроссовым панелям, которых насчитывается 5 шт., установленных в зале ускорителя. Для снижения помех при передаче сигналов, они передаются в 10 В формате по коаксиальным проводам или витой паре. Приведение сигналов управления к необходимому уровню производится в непосредственной близости к объекту управления.

Аналогично, контрольные сигналы приводятся к 10 В формату вблизи точки измерения и затем передаются по кабелям к кроссовой панели. Компьютер нижнего уровня соединен с компьютером верхнего уровня через сетевой разветвитель.

Управляющие аналоговые сигналы формируются цифро-аналоговыми преобразователями (ЦАП) в диапазоне 0-10 В и передаются в нормализаторы уровня сигнала (НУС), которые усиливают или ослабляют сигнал до требуемого уровня в конкретном исполнительном устройстве. НУС представляют собой прецизионные помехозащищенные дифференциальные усилители с фиксированным коэффициентом усиления по постоянному току, требуемой амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ) и защитой по перегрузке тока и напряжения, как на входе, так и на выходе. Амплитудно-частотная характеристика НУС настраивается таким образом, чтобы обеспечить необходимое быстродействие управления устройством при максимальной помехозащищенности. Особое внимание при изготовлении и настройке НУС уделялось обеспечению стабильности коэффициента усиления и отсутствию дрейфа нуля. Необходимость применения НУС управляющих сигналов вызвана требованием использования всего диапазона ЦАП для сохранения его разрядности. Аналоговый сигнал с НУС используется как референсный схемой управления конкретного исполнительного устройства. Контрольные аналоговые сигналы поступают от различных измерительных устройств ускорителя и изначально имеют различные диапазоны значений (в Вольтах) и полярность. Для приведения этих сигналов к единому диапазону значений, были также изготовлены НУС, которые позволяют использовать многоканальные аналогово-цифровые преобразователи (АЦП), работающие в едином диапазоне напряжений (0-10 В). Дифференциальный вход НУС необходим для устранения помехи, вносимой контуром общего заземления. Наличие на ускорителе большого количества источников постоянного тока и напряжения, подключенных к общему контуру заземления, приводит к смещению потенциала земли в различных точках ускорителя из-за сопротивления контура заземления. Причем это смещение может меняться при изменении режимов работы ускорителя. Поэтому для заземления сигнала НУС по стороне ЦАП и АЦП используется точка заземления, расположенная рядом с платами управления. Заземление НУС по стороне референсного сигнала производится в точке расположения управляемого устройства. Кроме того, для подавления эффекта наложения частот в измерительные цепи внесены RC фильтры, отсекающие помехи на частотах больших частоты выборки по каждому каналу.

**Программное обеспечение нижнего уровня.** Измерения контролируемых величин производится при помощи многоканальных АЦП, частота выборки по каждому каналу составляет 1 кГц. Измерение производится непрерывно, и данные помещаются в промежуточный массив данных. Программа обработки, установленная на компьютере нижнего уровня, работает в циклическом режиме и периодически выбирает накопленный массив данных. Время выполнения цикла программы фиксированное и обычно равно 20 мс, но если во время выполнения цикла возникли какие-либо задержки, связанные со служебными программами компьютера или обращением к памяти, то это время кратно 20 мс. Время исполнения цикла в 20 мс выбрано для полного подавления помех 50 Гц от электрической сети, дающих основной вклад в наводки, присутствующих в цепях измерений. За время выполнения цикла накапливается 20 единичных измерений, которые усредняются, что позволяет снизить шумы, не кратные 50 Гц, присутствующие в цепях измерения в 4 раза. Присутствие во входном аналоговом сигнале случайного шума небольшой амплитуды, порядка 1-2 минимально значимых разрядов (МЗР), позволяет получить разрешение лучше, чем МЗР, за счет того что среднее значение за период усреднения может принимать промежуточные значения между соседними целыми, полученными от АЦП.

Большинство устройств ускорителя требует наличия управляемой астатической обратной связи, замкнутой через компьютер. Это требование вызвано нестабильностью коэффициентов передачи между управляющими сигналами, выдаваемыми компьютером через ЦАП и истинными значениями установленных параметров. Эти нестабильности коэффициентов могут иметь непрогнозируемый и плохо контролируемый характер, например, нагрев обмоток магнитов, изменение давления изолирующего газа в каскадном генераторе. На требуемом уровне точности настройки влияние может даже оказать изменение напряжения электрической сети. В то же время,

точность измерения всех контрольных цепей достаточна для обеспечения заданной точности. Внесение астатической обратной связи позволяет осуществлять автоматическую подстройку управляющего сигнала для получения требуемого значения параметра на выходе исполнительного устройства, контролируемого через измерительную цепь. Была разработана программная процедура пропорционального интегрального регулятора (ПИР) с изменяемыми для различных режимов параметрами регулирования. В процедуру добавлены дополнительные функции, необходимые для управления объектом. Во-первых, это ограничитель скорости роста управляемого параметра. При быстром изменении большинства параметров как высоковольтных, так и высокоточных возникают перегрузки в исполнительных устройствах, связанные с реактивной составляющей нагрузки, а также, при наличии аппаратной обратной связи в устройстве, происходит перерегулирование объекта. Введены программные ограничители скорости роста уставки, а также во время роста и спуска управляемого параметра блокируется интегрирование в ПИР. При больших рассогласованиях требуемого и реального значения параметра, рост уставки блокируется до тех пор, пока реальное значение не приблизится к требуемому значению. Для устранения эффекта мерцания введено окно нечувствительности шириной в один МЗР, в пределах которого интегрирование ПИР блокируется.

Все управляющие и контрольные сигналы, используемые в аналоговых цепях, на стадии цифроаналогового преобразования лежат в диапазоне  $\pm 10$  В. Для управления используется диапазон  $0 - +10$  В, но НУС используют биполярный сигнал на входе и выходе, для сохранения линейности в районе «0». Для каждого конкретного устройства этот 10 В диапазон соответствует полному диапазону изменения управляемого или измеряемого параметра. Такие исполнительные устройства как каскадный генератор, электромагниты и высоковольтное питание источников ионов имеют нелинейную зависимость выходного параметра от референсного сигнала и соответственно сигнала, выдаваемого ЦАП, поэтому была произведена калибровка каждого исполнительного устройства по управляющему сигналу и построены калибровочные кривые управления этими устройствами. Полученные кривые программно гладко интерполированы между калибровочными точками. Для устройств, имеющих линейный отклик, измерены коэффициенты связи и смещения между референсным сигналом и управляемым параметром. Эти кривые и коэффициенты внесены в компьютерные процедуры управления и используются ими при установке требуемого значения параметра. Аналогичная калибровка была сделана для контрольных сигналов, получаемых от измерительных устройств ускорителя. Использование калибровочных кривых и коэффициентов в цепи управления позволяет минимизировать пропорциональный член в ПИР, что повышает устойчивость его работы, а также ограничить диапазон регулирования интегрального члена ПИР.

Программы компьютеров верхнего и нижнего уровня используют разные форматы данных в своей работе. Программа компьютера нижнего уровня использует данные в 10 В формате. Это сделано для унификации процедур, работающих с различными устройствами. При этом для процедур, которые используют данные измерений, усреднение производится за время всего цикла. Если это необходимо для процедуры, использующей эти данные, то производится нормировка на истинное время цикла. Это сделано для максимально быстрого отклика системы при работе в режиме реального времени. Приведение данных измерений к реальным значениям на компьютере нижнего уровня производится только для их визуализации на мониторе, а также передачи на компьютер верхнего уровня. Данные, передаваемые компьютеру верхнего уровня, группируются по 20 последовательных измерений, усредняются, пересчитываются к реальным значениям и передаются по UDP протоколу. Протокол UDP не требует подтверждения получения от компьютера-адресата, поэтому задержки в выполнении программ на обоих компьютерах не происходит. Аналогично, команды управления, подаваемые с компьютера верхнего уровня, представлены в реальных величинах и после получения их компьютером нижнего уровня, пересчитываются к 10 В формату с использованием калибровочных кривых и коэффициентов.

**Программное обеспечение верхнего уровня.** Компьютер верхнего уровня работает с данными, представленными только в реальных значениях. Это позволяет не вносить корректировок в программу управления ускорителем при изменении калибровочных кривых и коэффициентов, которые использует только компьютер нижнего уровня. Конфигурации настроек

для каждого вида работ записываются в отдельные файлы и могут создаваться как «с нуля», так и копированием с последующей модификацией уже существующих конфигураций. Интерфейс программы разбит на два поля: одно общее для всех режимов работы, а второе выполнено в виде переключаемых закладок, которые позволяют оператору выбрать и выполнить необходимые действия с одной из подсистем (рисунок 2).

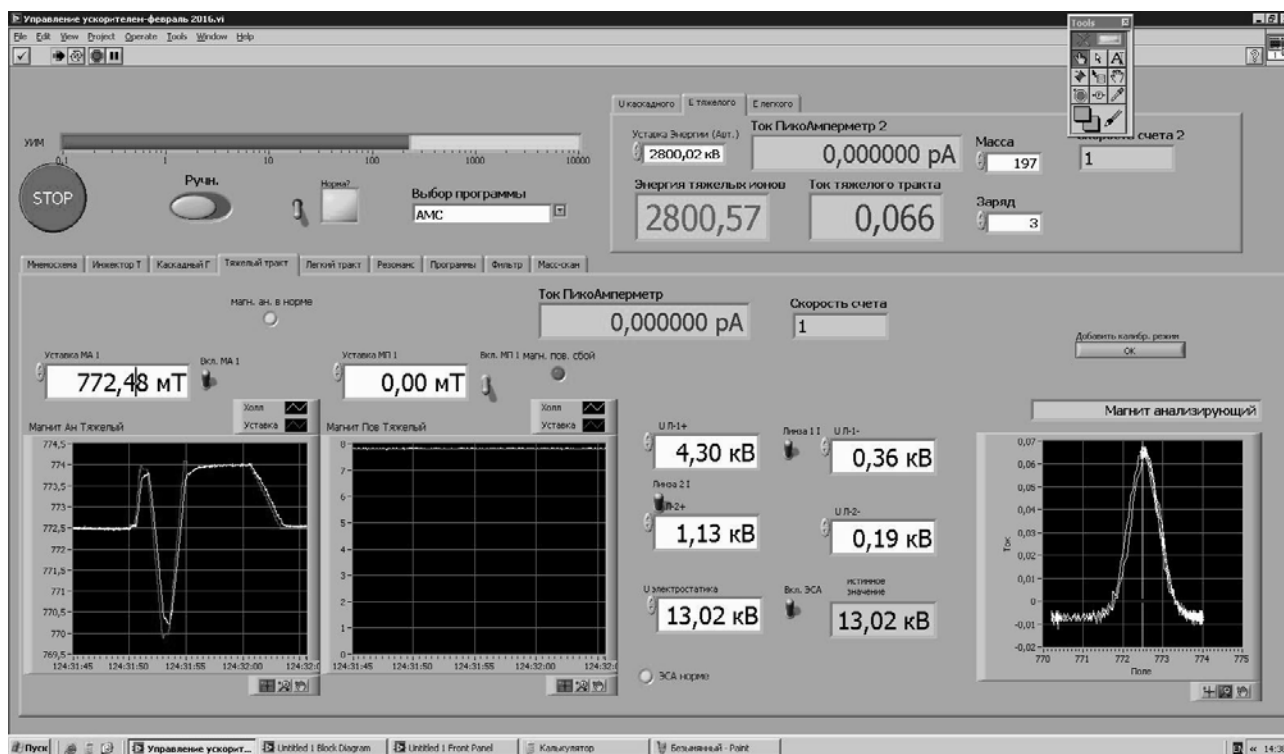


Рисунок 2 - Рабочее окно программы оператора

При настройке и смене режимов работы ускорителя, параметры узлов ускорителя должны изменяться в соответствии с изменившимися условиями работы. Одна из целей построения системы автоматизации – это возможность работы по конечным параметрам, при которой оператор задаёт конечную станцию, в которой происходит работа, выбирает массу и заряд ускоряемых ионов и их энергию, а система управления сама вычисляет и устанавливает необходимые параметры узлов и устройств. Для выполнения этой задачи была разработана подпрограмма, осуществляющая вычисление параметров узлов ускорителя. Следует отметить, что траектория пучка ионов определяется двумя параметрами:

$$\text{магнитной: } Br = \frac{\sqrt{2m\mathcal{E}}}{q} \text{ и электростатической: } Er = \frac{2\mathcal{E}}{q} \quad \text{жёсткостью,}$$

где  $m$  – масса иона,  $\mathcal{E}$  - его энергия, а  $q = ne$  - заряд.

Независимо от типа ионов, пучки с одинаковой магнитной (электростатической) жёсткостью в магнитных (электрических) полях будут двигаться по одинаковым траекториям. Поэтому ионнооптические элементы тракта разбиты на две группы – магнитные и электростатические элементы, каждый из которых управляется по соответствующей жёсткости. При работе с тяжёлыми ионами, оператор с управляющего компьютера вводит требуемую массу иона, массу молекулярного остатка, (если его нет, то по умолчанию «0»), заряд и энергию, при работе с легкими – вводит тип иона и его энергию. Программа управления рассчитывает необходимое напряжение на каскадном генераторе, высчитывает жёсткости пучка и, исходя из них, требуемые значения параметров узлов. Использование жёсткостей в качестве аргумента калибровочных зависимостей позволяет производить настройку ускорителя на ионах с хорошими токами и использовать параметры этой настройки для других, менее интенсивных ионных пучков. Попытка



использовать расчетные параметры на основе теоретических моделей ионнооптических элементов показала, что теоретические значения не совпадают точно с реальными значениями при условии оптимальной настройки ускорителя, поэтому были построены экспериментальные зависимости оптимальных значений параметров от жесткости пучка для каждого ионнооптического элемента.

Для вычисления напряжения каскадного генератора используются следующие расчетные формулы:

для легких ионов: 
$$U_{cg} = (\mathcal{E} - U_{src})/2,$$

для тяжелых ионов: 
$$U_{cg} = (\mathcal{E} - U_{src}) / \left( \frac{m}{m+m_{mr}} + \frac{q}{e} \right),$$

где  $U_{cg}$  – напряжение каскадного генератора,  $U_{src}$  – напряжение на соответствующем ионном источнике,  $m_{mr}$  – масса молекулярного остатка.

Последующие испытания этой подпрограммы показали, что она дает удовлетворительные результаты, то есть при начале работы, перенастройке энергии или изменении массы ионов пучок автоматически занимает траекторию оптимальной трансмиссии и не требует дополнительной ручной подстройки.

**Закключение.** Для оценки эффективности проведенных мероприятий были проведены сравнительные испытания созданной системы автоматического управления. Сравнивались как параметры отдельных узлов, так и работа всего ускорителя в целом. Испытания высоковольтных блоков питания ионных источников показали, что новая система управления обладает неоспоримыми преимуществами по сравнению с ранее использовавшейся. Время настройки источников ионов снизилось с 40 мин. до 1-2 мин. Повторяемость между различными сеансами работы в пределах 5 В для тяжелого тракта и 10 В для легкого по сравнению с 200 В по старой схеме. Испытания магнитов производились при разных значениях магнитного поля на предмет точности установки, его кратковременной и долговременной стабильности, скорости установки требуемого значения магнитного поля, независимости от влияния остаточной намагниченности и от предыдущих установок при циклических переключениях. Результаты испытаний показали сокращение времени настройки в 20-30 раз. Повторяемость и стабильность поля магнитов тяжелого тракта 0,05 мТл, легкого – 0,1 мТл, по сравнению с 0,5 мТл при ручном управлении. Испытания каскадного генератора показали сокращение времени настройки с «0» до требуемого значения с 1 часа до 5 мин. Стабильность высокого напряжения улучшилась с 200 В до 40 В. Время настройки электростатических элементов снизилось с 2-5 мин. до 1 сек. Были проведены сравнительные испытания времени настройки при ручном и автоматическом режимах работы ускорителя в целом, которые показали сокращение непроизводительных затрат ускорительного времени в 5-20 раз в зависимости от вида проводимых работ.

**Н.В. Глушенко, И.Д. Горлачев, А.А. Желтов,  
А.В. Киреев, Қ.М. Мұқашев\*, А.В. Платов**

Ядролық физика институты. Алматы қ., Қазақстан  
\*Әл-Фараби ат-ы Қазақ Ұлттық университеті. Алматы қ., Қазақстан

#### **УКП-2-1 ҮДЕТКІШІМЕН ЖҮРГІЗІЛЕТІН ФИЗИКАЛЫҚ ЭКСПЕРИМЕНТТЕРДІ ОРЫНДАУДЫ АВТОМАТТАНДЫРУ**

**Андатпа.** Электростатикалық УКП-2-1 үдеткішінің басқару жүйесі толығымен жаңартылды. Нәтижесінде үдетілген иондар шоғырының сапалық көрсеткіштері түбегейлі өзгеріске ұшырады. Эксперименттерді орындау мүмкіндігі жетілдірілді. Үдеткішті жұмысшы режимге шығару мерзімі біршама қысқарды. Иондар шоғырының параметрлерін анықтау дәлдігі арттырылып, апаттық жағдаяттардың ықтималдығы күрт төмендеді. Экспериментті иондар шоғырының параметрлерін циклдік режимге көшіру арқылы немесе алдын-ала жобаланған программа бойынша орындау мүмкіндігі туды.

**Тірек сөздер:** экспериментті автоматтандыру, иондардың электростатикалық үдеткіші, иондық шоғырлар технологиясы, шоғыр көрсеткіштері, шоғыр сипаттары.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Nikiforov, V. Aleinikov, A. Sychev, I. Borina, A. Rukavishnikov. «Experience in using FlexCtrl SCADA for accelerator automation». Physics of Particles and Nuclei Letters. July 2012, Volume 9, Issue 4-5, pp 417-421.
- [2] Kantsyrev V., Bakhmutova A. V., Golubev A. A., Demidov V. S., Demidova E. V., Ladygina E. M., Markov N. V., Smirnov N. G., Turtikov V. I., Fertman A. D., Shestov L. M., Khudomyasov A. V. «An integrated automation system for experiments on the fast extraction beamline of the TWAC-ITEP accelerator-accumulator facility» Instruments and Experimental Techniques, September 2010, Volume 53, Issue 5, pp 663-674.
- [3] Mirandaa P. A., Chestaa M. A., Cancinoa S. A., Moralesa J. R., Dinatora M. I., Wachtera J. A. and C.Tenreirob, “Recent IBA setup improvements in Chile”, Nuclear Instruments and Methods in Physics Research B248, (2006) 150-154.
- [4] Бублей А.В., Гончаров А.Д., Малыгин А.Н., Матюшин Г.Г., Останин В.П., Сухина Б.Н., Тупиков В.С. и Чумаков С.Н. «Системы управления для ионных имплантеров», труды XIV конференции по ускорителям заряженных частиц, Протвино, Россия, 1994.
- [5] Langerak J.J., De Haas A.P., Kronenburg M., Smit W., Verwelst B. And Van K. Der Borg «Automation of AMS measurements in Utrecht» Nuclear Instruments and Methods in Physics Research B29 (1987) 94-96.
- [6] Грехов О.В., Другаков А.Н., Киселев Ю.В. Система управления линейным ускорителем ИЯИ РАН. Problems of atomic science and technology. 2008. № 3. Series: Nuclear Physics Investigations (49), p.64-67.
- [7] José Lopes, Francisco André Corrêa Alegria and Luís Redondo, «Automation of a Particle Accelerator Operation Using LabVIEW». Proceedings of the World Congress on Engineering 2008 Vol I, WCE 2008, July 2 - 4, 2008, London, U.K.
- [8] Бутырин П. А., Васьковская Т. А., Каратаев В. В., Материнкин С. В. «Автоматизация физических исследований и эксперимента компьютерные измерения и виртуальные приборы на основе LabVIEW 7». ДМК пресс. 2005.

**Сведения об авторах:**

Глущенко Н.В. - начальник службы, Институт Ядерной Физики, Алматы, Казахстан. моб. +7(777)2181748. e-mail: gluchshenko.nikolay@gmail.com

Горлачев И.Д. - к.ф.-м.н., начальник группы, Институт Ядерной Физики, Алматы, Казахстан. моб. +7(777)5951441, e-mail: igor.gorlachev@gmail.com.

Желтов А.А. - начальник службы, Институт Ядерной Физики, Алматы, Казахстан. моб. +7(777)2720893. e-mail: zh\_aa@mail.ru.

Киреев А.В. - начальник установки, Институт Ядерной Физики, Алматы, Казахстан. моб. +7(777)2447020. e-mail: kirayev.aleks@gmail.ru,

Мукашев К.М.- д.ф.-м.н., профессор, КазНУ им. Аль-Фараби, Алматы, Казахстан. моб.8-7013739283. e-mail: kanat-kms@mail.ru

Платов А.В. - старший научный сотрудник, Институт Ядерной Физики, Алматы, Казахстан. моб. +7(705)2196050. e-mail: platov@inp.kz

## NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN  
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 6, Number 316 (2017), 139 – 145

УДК 53, 532.133, 621.3.018.72.025.1

**K. A. Kabylbekov, G. SH. Omashova,**

M. Auezov South Kazakhstan State University, Shymkent, Kazakhstan  
gauhar\_omashova@mail.ru

## ORGANIZATION OF IMPLEMENTATION OF COMPUTER LABORATORY WORKS ON HYDRODYNAMICS WITH APPLICATION OF MATLAB

**Abstract.** Organization performing computer laboratory work holding calculation and visualization in MATLAB language are proposed: 1) determine the distribution of pressure at the bottom of the cylindrical vessel with water along the radius, rotating around a vertical axis and determine the form a of free liquid surface, represent the results in a plot of pressure on the distance from the axis along the rotation radius of the vessel, and depict the shape of a free surface in the form of a geometric figure. Calculations showed that the pressure increases with the distance to the fourth power. The shape of the free surface - a paraboloid of rotation. 2) In problem "Pipe with a hole from which the liquid flows" calculation and visualization revealed that the rate of flow of fluid from the hole depends on the "height" of the liquid column in the pipe. This relationship is presented in the form of a graph of the dependence of the rate of flow of fluid from the "height" of the liquid column in the pipe.

**Key words.** Free surface, pressure distribution, paraboloid rotation.

**К.А.Кабылбеков, Г.Ш.Омашова**

Южно-Казахстанский государственный университет им. М.Ауэзова, Шымкент, Казахстан

## ОРГАНИЗАЦИЯ ВЫПОЛНЕНИЯ КОМПЬЮТЕРНЫХ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ ПО ГИДРОДИНАМИКЕ С ПРИМЕНЕНИЕМ СИСТЕМЫ MATLAB

**Аннотация.** Предлагается организация выполнения компьютерных лабораторных работ с проведением расчетов и визуализации на языке MATLAB: 1) определить распределение давления на дне вдоль радиуса цилиндрического сосуда с водой, вращающегося вокруг вертикальной оси и форму свободной поверхности жидкости, результаты представить в виде графика зависимости давления от расстояния от оси вращения вдоль радиуса сосуда, а форму свободной поверхности в виде геометрической фигуры. Расчеты показали, что давление возрастает с расстоянием в четвертой степени. Форма свободной поверхности – параболоид вращения. 2) в задаче «Труба с отверстием из которого вытекает жидкость» расчеты и визуализация показали, что скорость вытекания жидкости из отверстия зависит от «высоты» столба жидкости в трубе. Эта зависимость представлена в виде графика зависимости скорости вытекания жидкости от «высоты» столба жидкости в трубе.

**Ключевые слова.** Свободная поверхность, распределение давления, параболоид вращения.

В настоящее время, когда все образовательные учреждения Казахстана полностью обеспечены компьютерными средствами, интерактивными досками, Интернетом, программными ресурсами и почти все преподаватели прошли языковые и компьютерные курсы повышения квалификации очень важно предоставленной возможностью использования компьютерных обучающих программ, моделей, выполнения компьютерных лабораторных работ. Нами в течении

ряда лет ведется работа по организации выполнения компьютерных лабораторных работ по физике с использованием ресурсов компании «Физикон» и «Constructor.Электроника» [1],[2]. Ряд моделей бланков организаций выполнения лабораторных работ внедрены в учебный процесс нашего университета и школах Южно-Казахстанской области [3]-[26]. Студенты обучающиеся по специальности 5В060400 и 5В011000-физика успешно осваивают дисциплину «Компьютерное моделирование физических явлений» которая является логическим продолжением дисциплин «Информационные технологии в преподавании физики», «Использование электронных учебников в преподавании физики». По этой дисциплине предусмотрено изучение и усвоение программного языка системы MATLAB, ознакомление ее ограмными возможностями при моделировании и визуализации физических процессов. Предлагаемая статья посвящена организации выполнения лабораторных работ по гидродинамике, целью которой является проведение расчета и визуализации на языке MATLAB [27].

**Лабораторная работа:** «Расчет и визуализация системы: Цилиндрический сосуд с водой, вращающийся вокруг вертикальной оси»

**Цель работы:** Провести расчет и визуализацию распределения давления воды на дне сосуда вдоль его радиуса и найти форму свободной поверхности воды.

Условия задачи взяты из [28]: Цилиндрический сосуд с водой вращают вокруг его вертикальной оси с угловой  $\omega=2$  рад/с. Найти форму свободной поверхности воды и распределение давления воды на дне сосуда вдоль его радиуса, если давление в центре дна равно  $p_0=1.05 \cdot 10^5$  Па.

Форма свободной поверхности воды – парабола с высотой от поверхности  $Z = \left(\frac{\omega^2}{2g}\right) r^2$  жидкости на оси сосуда, где  $r$ -расстояние от оси вращения; давление распределяется на дне сосуда вдоль его радиуса по закону  $p=p_0+r^2 \omega^2 r^4$ .

Программа расчета и визуализации

```
>> w=2; r0=1000; % ввод параметров
>> p0=1.05*10.^5;
>> r=-1:0.01:1; % ввод вектора расстояния вдоль дна сосуда
>> p=p0+r0.^2.*w.^2.*r.^4; % вычисление распределения давления
>> plot(r,p,'k-') % визуализация
>> grid on % нанесение координатной сетки
>> xlabel('r') % нанесение названия оси
>> ylabel('p') % нанесение названия оси
>> title('p=F(r)') % нанесение названия графика
```

Результат представлен на рис. 1

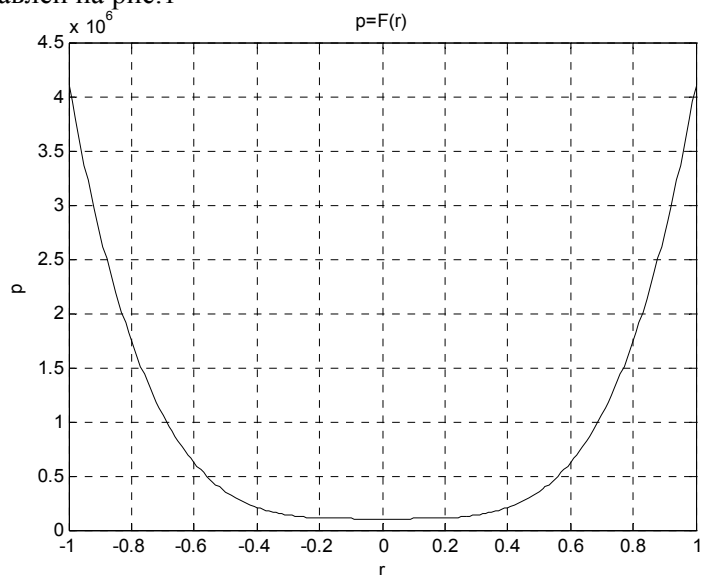


Рисунок 1 - Распределение давления на дне сосуда вдоль его радиуса

Уравнение движения частичек жидкости в параметрическом виде

$$X=a*\cos(w*t); Y=a*\cos(2*w*t);$$

$$\text{Высота подъема жидкости } Z = \left(\frac{\omega^2}{2g}\right) r^2$$

Визуализация свободной поверхности жидкости

```
>> a=2;
>>t=-2*pi:pi/20:2*pi;
X=a*cos(t);
>>Y=a*sin(t);
>>w=300;
>>h=300; figure('Units','Pixels','position',[100,100,w,h]);
>>plot(X,Y) % визуализация расчетов
grid on % нанесение координатной сетки
>> Y=a*sin(t);
>> w=300;
>>h=300; figure('Units','Pixels','position',[100,100,w,h]);
>>plot(X,Y) % визуализация расчетов
grid on % нанесение координатной сетки
>> h=300;
>> figure('Units','Pixels','position',[100,100,w,h]);
>> plot(X,Y) % визуализация расчетов
>> grid on % нанесение координатной сетки
>> axis([-3, 3, -3, 3]);
>> a=2;
>>t=-2*pi:pi/20:2*pi;
>>X=a*cos(t);
>> t=-2*pi:pi/20:2*pi;
>> X=a*cos(t);
>> v=0:pi/20:2*pi;
>> [T,V]=meshgrid(t,v);
>> Y=a*sin(T);
>> X1=X;
>> Y1=Y.*cos(V);
>> Z1=abs(Y.*sin(V));
>> figure;
>> hFigure=gcf;
>> surf(X1,Y1,-Z1)
>> hAxes=gca;
>> xlabel('x'); ylabel('y'); zlabel('z');
>> view([-24,40])
>> hold on
>> hPlot=plot(X,Y); % визуализация расчетов
>> set(hPlot,'LineWidth',5)
```

Результаты представлены на рис 2 и 3.

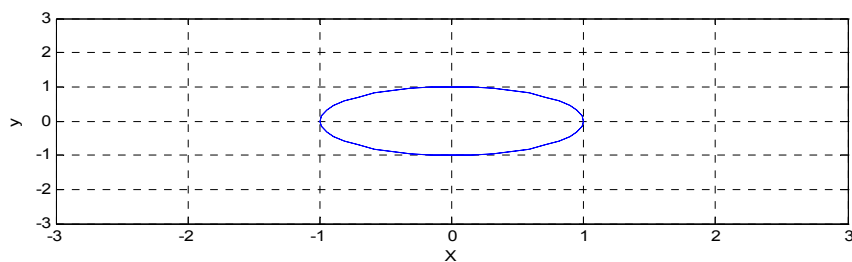


Рисунок 2 - Проекция на плоскость

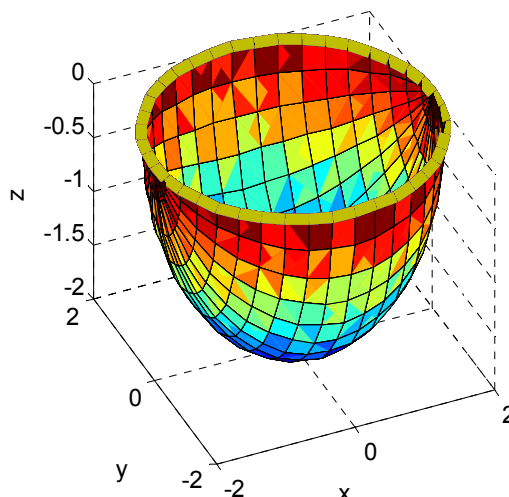


Рисунок 3 - Свободная поверхность жидкости – параболоид вращения.

Задание для самостоятельной работы: Найти распределение силы давления на дно сосуда вдоль радиуса и нарисовать график зависимости силы от расстояния  $r$  отсчитанного от оси вращения. (Примечание: так как давление зависит от радиуса дна сосуда при расчете силы необходимо интегрировать выражение давления по элементу площади  $2\pi r dr$ . Интегрировать можете методом трапеции или Симпсона (при этом необходимо предварительно создать m.файл).

**Лабораторная работа №2.** Расчет и визуализация системы: «Труба с отверстием из которого вытекает жидкость»

**Цель работы:** Провести расчет и нарисовать график зависимости скорости вытекания жидкости из отверстия от «высоты» ее столба  $h$ .

Условия задачи [28]: Горизонтально расположенная трубка АВ длины  $l=1$ м вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega=2$  рад/с вокруг неподвижной вертикальной оси  $OO'$ , проходящей через конец А (Рис. ). В трубке находится идеальная жидкость. Конец А трубки открыт, а в закрытом конце В имеется очень малое отверстие. Найти, с какой скоростью будет вытекать жидкость в зависимости от «высоты» ее столба  $h$ .

Расчетная формула скорости вытекания жидкости из отверстия

$$v = \omega h \sqrt{(2l/h) - 1}$$

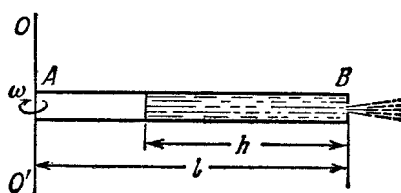


Рисунок 4

Программа расчета и визуализации

```
>> l=1;
>> w=2;
>> h=0:0.10:1;
>> v=w.*h.*sqrt((2.*l./h)-1);
>> plot(h,v,'k-')
>> grid on
>> xlabel('h,m')
>> ylabel('v, m/s')
>> title('v=F(h)')
```

Результат представлен на рис.5.

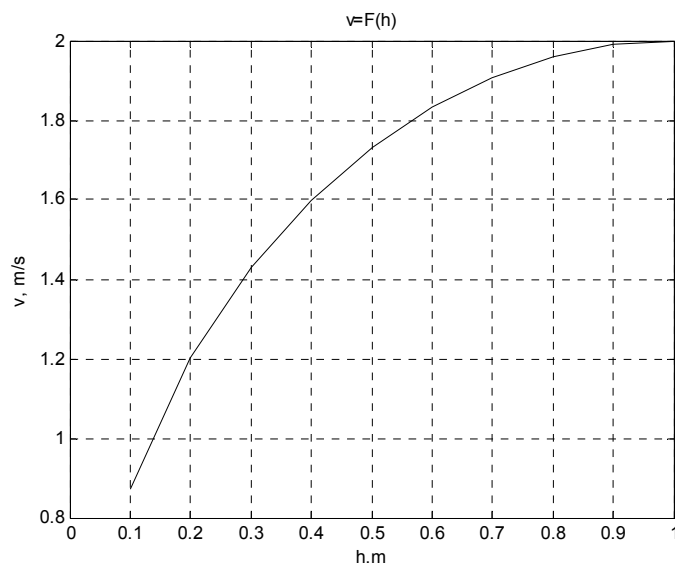


Рисунок 5 - Скорость вытекания жидкости в зависимости от «высоты» ее столба h.

Задание для самостоятельной работы: рассчитать расход жидкости за 1 секунду при сечении отверстия  $S_0=1 \text{ мм}^2$

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] CD диск компании ОАО «Физикон». «Открытая физика 1.1».2001.
- [2] <http://elektronika.newmail.ru>
- [3] Кабылбеков К.А., Саидахметов П.А., Арысбаева А.С. Модель бланка организации самостоятельного выполнения учениками компьютерных лабораторных работ. Известия НАН РК, серия физ.мат., Алматы, 2013, №6, С 82-89.
- [4] Кабылбеков К.А., Саидахметов П.А., Байдуллаева Л.Е., Абдураимов Р. Методика применения закономерностей фото- и комптонэфекта, модели бланков организации выполнения компьютерной лабораторной работы. Известия НАН РК, серия физ.мат., Алматы, 2013. №6, С 114-121.
- [5] Кабылбеков К.А., Саидахметов П.А., Турганова Т.К., Нуруллаев М.А., Байдуллаева Л.Е. Модель урока на тему собирающей и рассеивающей линзы. Известия НАН РК, серия физ.-мат.№2, Алматы, 2014, С 286—294.
- [6] Кабылбеков К.А., Аширбаев Х. А., Саидахметов П.А., Рустемова К. Ж., Байдуллаева Л. Е. Модель бланка организации выполнения компьютерной лабораторной работы по исследованию дифракции света. Изв. НАН РК, серия физ.-мат, №1(299), Алматы, 2015, С 71-77.
- [7] Кабылбеков К.А., Аширбаев Х. А., Такибаева Г.А., Сапарбаева Э.М., Байдуллаева Л. Е., Адинева Ш.И. Модель бланка организации компьютерной лабораторной работы по исследованию движения заряженных частиц в магнитном поле и работы масс-спектрометра. Изв. НАН РК, серия физ.-мат, №1(299), Алматы, 2015, С 80-87.
- [8] Кабылбеков К.А., Аширбаев Х. А., Саидахметов, П. А., Байгулова З.А., Байдуллаева Л.Е. Модель бланка организации компьютерной лабораторной работы по исследованию колец Ньютона. Изв. НАН РК, серия физ.-мат, № 1(299), Алматы, 2015, С14-20.
- [9] Кабылбеков К.А., Аширбаев Х.А., Сабалахова А.П., Джумагалиева А.И. Модель бланка организации выполнения компьютерной лабораторной работы по исследованию интерференции света. Изв. НАН РК, серия физ.мат., № 3 (301), Алматы, 2015, С 131-136.
- [10] Кабылбеков К.А., Аширбаев Х.А., Сабалахова А.П., Джумагалиева А.И. Модель бланка организации выполнения компьютерной лабораторной работы по исследованию эффекта Доплера. Изв. НАН РК, серия физ.-мат., № 3 (301) Алматы, 2015, С 155-160.
- [11] Кабылбеков К.А., Аширбаев Х.А., Арысбаева А.С., Джумагалиева А.М. Модель бланка организации компьютерной лабораторной работы при исследовании физических явлений. Современные наукоемкие технологии, №4, Москва, 2015, С 40-43.
- [12] Кабылбеков К.А., Саидахметов П. А., Аширбаев Х.А., Омашова Г.Ш., Бердалиева Ж. Модель бланка организации компьютерной лабораторной работы по исследованию электромагнитных колебаний. Изв. НАН РК, серия физ.мат. Алматы, №1(305), 2016, С 111-116.
- [13] Кабылбеков К.А., Саидахметов П. А., Омашова Г.Ш., Бердалиева Ж., Джумагалиева А.И. Модель бланка организации компьютерной лабораторной работы по исследованию взаимодействия двух бесконечно длинных параллельных проводников с токами. Изв. НАН РК, серия физ.мат. Алматы, №1(305), 2016, С 135-140.
- [14] Кабылбеков К.А., Саидахметов П.А., Омашова Г.Ш., Суттибаева Д.И., Қозыбақова Г.Н. Модель бланка организации компьютерной лабораторной работы по исследованию изобарного процесса. Изв НАН РК серия физ. мат. Алматы, №2 2016г. С 92-97.
- [15] Кабылбеков К.А., Саидахметов П.А., Омашова Г.Ш., Абекова Ж.А., Нуруллаев М.А. Модель бланка организации выполнения исследовательских заданий по физике. Вестник НАН РК Алматы, №3, 2016, С 67-73.

- [16] Кабылбеков К.А., Саидахметов П.А., Аширбаев, Х.А., Абдубаева Ф.И., Досканова А.Е. Исследование работы газа на компьютерной модели Вестник НАН РК, Алматы, №2 2016. С83-88
- [17] Кабылбеков К.А., Саидахметов П. А., Омашова Г.Ш., Серикбаева Г.С., Суйеркулова Ж.Н. Модель бланка организации компьютерной лабораторной работы по исследованию свободных механических колебаний. Изв. НАН РК, серия физ. мат. Алматы, №2 2016г. С84-91.
- [18] Кабылбеков К.А. Мадияров Н.К., Саидахметов П.А. Самостоятельное конструирование исследовательских заданий компьютерных лабораторных работ по термодинамике. Труды IX Международной научн-методической конференции. Преподавание естественных наук (биологии, физики, химии) математики и информатики. Томск-2016, С 93-99.
- [19] Кабылбеков К.А., Саидахметов П.А., Омашова Г.Ш. Организация компьютерной лабораторной работы по исследованию реактивного сопротивления катушки индуктивности в цепи переменного тока. Вестник НАН РК-2017. Алматы, №1, С 77-82.
- [20] Кабылбеков К.А., Саидахметов П. А., Омашова Г.Ш., Аширбаев Х.А., Абекова Ж.А. Организация компьютерной лабораторной работы по исследованию изотерм реального газа. Изв. НАН РК серия физ. мат. Алматы, №1, 2017, С 77-83.
- [21] Кабылбеков К.А., Саидахметов П. А., Омашова Г.Ш., Организация выполнения компьютерной лабораторной работы по исследованию явления биения. Изв. НАН РК серия физ. мат., №2 , Алматы, 2017, С104-110.
- [22] Кабылбеков К.А., Омашова Г.Ш., Спабекова Р.С., Саидахметов П.А., Серикбаева Г., Арысбаева А.С. Модель бланка организации компьютерной лабораторной работы по исследованию изотермического процесса. Вестник НАН РК, №3, Алматы 2017, С119-207.
- [23] Кабылбеков К.А., Омашова Г.Ш., Спабекова Р.С., Саидахметов П.А., Абдрахманова Х.К., Арысбаева А.С. Самостоятельное конструирование заданий для выполнения компьютерной лабораторной работы по исследованию иохорного процесса. Известия НАН РК, сер. физ. мат., №3, Алматы , 2017, С127-134.
- [24] Кабылбеков К.А., Омашова Г.Ш., Спабекова Р.С., Саидахметов П.А., Серикбаева Г.С., Актуреева Г. Организация компьютерных лабораторных работ по исследованию тока включения и выключения источника тока с использованием пакета программ MATLAB. Известия НАН РК, сер. физ. мат., №3(313), Алматы , 2017, С139-146.
- [25] Кабылбеков К.А., Омашова Г.Ш., Спабекова Р.С., Саидахметов П.А., Серикбаева Г.С. , Актуреева Г. Организация компьютерных лабораторных работ по исследованию распределения молекул по скоростям и по высоте с поверхности Земли с использованием пакета программ MATLAB. Вестник НАН РК, №3 (313), Алматы, 2017, С111-119.
- [26] Кабылбеков К.А., Аширбаев Х.А., Абдрахманова Х.К., Джумагалиева А.И. Кыдырбекова Ж.Б. Организация выполнения лабораторной работы по исследованию электрического и магнитного полей с использованием пакета программ MATLAB. Известия НАН РК, сер. физ. мат., №3 (313), Алматы , 2017, С206-212.
- [27] Дьяконов В.П. MATLAB учебный курс. - СПб.: Питер, 2001. - 533с.
- [28] Иродов И.Е. Задачи по общей физике.-М: Наука. Гл. ред. физ. мат. литературы. 1997.-369с.

## REFERENCES

- [1] CD a disk of the company of Open Society "Physical icons". «The open physics I.I».**2001.**
- [2] <http://elektronika.newmail.ru>
- [3] Kabylbekov K.A., Saidahmetov P. A, Arysbaeva A.S. Model of the form of the organisation of self-maintained performance of computer laboratory operation. News NAN RK, series physical-mat., Almaty, **2013**, №6, P82-89.
- [4] Kabylbekov K.A., Saidahmetov P. A, Bajdullaeva L.E.Abduraimov. A procedure of use of computer models for photoeffect studying, Compton effect, models of forms of the organisation of performance of computer laboratory operations. News NAN RK, series physical-mat., Almaty, **2013**, №6, P114-121.
- [5] Kabylbekov K.A., Saidahmetov P. A. Turganova T.K, Nurullaev M. A, Bajdullaeva L.E. Model of carrying out of a lesson of modelling of agglomerating and diffusing lenses. News NAN RK, series physical-mat., Almaty, № 2, **2014**, P286-294.
- [6] Kabylbekov K.A., Ashirbaev H. A, Saidahmetov P. A, Rustemova T.Ж, Bajdullaeva L. E. Model of the form of the organisation of performance of computer laboratory operation on examination of a diffraction of light. News of NAN RK, series physical-mat., Almaty, № 1(299), **2015**, P71-77.
- [7] Kabylbekov K.A., Ashirbaev H. A, Takibaeva G.A, Saparbaeva E. M, Bajdullaeva L. E, Adineeva S.H.I. Model of the form of the organisation of computer laboratory operation on examination of a motion of charged particles in a magnetic field. News of NAN RK, series physical-mat., Almaty, № 1 (299), **2015**, P80-87.
- [8] Kabylbekov K.A., Ashirbaev H. A, Saidahmetov, P A, Bajgulova Z.A., Bajdullaeva L.E. Model of the form of the organisations of computer laboratory operation on examination of Newton's fringes. News NAN RK, series physical-mat/, Almaty, №1 (299), **2015**, P14-20.
- [9] Kabylbekov K.A., Ashirbaev H.A., Sabalahova A.P., Dzhumagalieva A.I. Model of the form of the organisation of computer laboratory operation on examination of the phenomenon of an interference of light. News of NAN RK, series physical-mat., № 3 (301), Almaty, **2015**, P131-136
- [10] Kabylbekov K.A., Ashirbaev H.A., Sabalahova A.P., Dzhumagalieva A.I. Model of the form of the organisation computer laboratory operations on examination Doppler-effect. News NAN RK, series physical-mat., № 3 (301) Almaty, **2015**, P155-160.
- [11] Kabylbekov K.A., Ashirbaev H.A., Arysbaeva A.S., Dzhumagalieva A.I. Models of the form of the organisation of computer laboratory operations at examination of the physical phenomena. Modern high technologies. №4, Moscow, **2015**. P 40-43.
- [12] Kabylbekov K. A., Saidahmetov P. A., H. A.Ashirbaev, Omarova G. Sh., Beraldieva J. Model Blanca organization of computer laboratory works on research of electromagnetic oscillations. News NAN RK, series physical-mat., №1(305), Almaty, **2016**, P111-116.



[13] Kabyzbekov K. A., Saidahmetov P. A., Omarova G. Sh., Berdalieva J., Dzhumagalieva A. I. Model Blanca computer organization laboratory study of the interaction between two infinitely long parallel conductors with currents. News NAN RK, series physical-mat., №1(305), Almaty, 2016, P 135-140.

[14] Kabyzbekov K.A., Saidahmetov P A, Omashova G.SH, Suttibaeva D.I., Kozybakova G. N. Model of the form of the organization of computer laboratory operation of isobaric process. News NAN RK, series physical-mat., Almaty, № 2, 2016, P. 92-97.

[15] Kabyzbekov K.A., Omashova G.SH., Saidahmetov P.A., Nurullaev M. A., Artygalin N.A. Models of the form of the organization of computer laboratory operation on examination of the Carnot cycle. News NAN RK, series physical-mat., Almaty, № 2, 2016, P 98-103.

[16] Kabyzbekov K.A., Saidahmetov P A, Ashirbaev H A, Abdubaeva Ph.I, Doskanova A.E. Examination of operation gaz on computer model. The bulletin of NAN RK №2 2016. P 83-88.

[17] Kabyzbekov K.A., Saidahmetov P A, Omashova G.Sh., Serikbaeva G.S., Sujerkulova Zh. N. News NAN RK, series physical-mat., № 2, 2016, P 84-91.

[18] Kabyzbekov K. A. Madjarov N. T., Saidahmetov P. A. An Independent design research assignments, computer laboratory work on thermodynamics. Proceedings of the IX International scientific-methodical conference. Teaching natural Sciences (biology, physics, chemistry) mathematics and computer science. Tomsk-2016, P 93-99.

[19] Kabyzbekov K. A., Saidahmetov P. A., Omashova G.Sh Organization computer laboratory work on the study of reactance inductor in an ac circuit. The bulletin of NAN RK №1, Almaty, 2017. P 77-82.

[20] Kabyzbekov K. A., Saidahmetov P. A., Omashova G.Sh., Ashirbaev H. A., Abekova J. A. Organization of computer laboratory works on the study of the isotherms of a real gas. News NAN RK, series physical-mat., Almaty, №1, 2017, P 77-83.

[21] Organization of computer laboratory works on the study of the phenomenon of beats. News NAN RK, series physical-mat., №2, Almaty, 2017, C104-110.

[22] Kabyzbekov KA, Omashova G. Sh., Spabekova R.S, Saidahmetov P.A, Serikbaeva G. Arysbaeva A.S. Blank computer model of the organization of the laboratory work on the study of the isothermal process. Herald of the National Academy of Sciences of Kazakhstan, №3, Almaty, 2017, P119-207.

[23] Kabyzbekov K.A, Omashova G.Sh., Spabekova R.S, Saidahmetov P.A., Abdrakhmanova H.K, Arysbaeva A.S. Self konstruovanie tasks for executing a computer lab to study ihohornogo process. News NAN RK, series physical-mat., №3, Almaty, 2017, P 127-134.

[24] Kabyzbekov K.A, Omashova G. Sh, Spabekova R.S, Saidahmetov P.A, Serikbaeva G.S, Aktureeva G. Organization of computer laboratory studies of inrush current on and off the power supply to ispolzvaniam MATLAB software package. News NAN RK, series physical-mat., Almaty, №3, 2017, P139-146.

[25] Kabyzbekov K.A, Omashova G. Sh, Spabekova R.S, Saidahmetov P.A, Serikbaeva G.S, Aktureeva G. Organization of computer labs for the study of the molecular distribution of the velocity and the height of the Earth's surface with ispolzvaniam MATLAB software package. Bulletin RK NAS, №3, Almaaty, 2017, P 111-119.

[26] Kabyzbekov K.A, Ashirbayev H.A, Abdrakhmanova H.K, Dzhumagalieva A.I., Kydyrbekova J.B. Organization of laboratory work on the study of electric and magnetic fields using MATLAB software package. studies of inrush current on and off the power supply to ispolzvaniam MATLAB software package. News NAN RK, series physical-mat., Almaty, №3, (313), Almaty, 2017, P 206-212.

[27] Dyakonov V.P. MATLAB training course. - SPb.: Peter, 2001. – 533p.

[28] Herods I.E. Tasks of general fizike. M: Science. Ch. Ed. nat. mat. literature. 1997.-369 p.

**К.А.Қабылбеков, Г.Ш. Омашова,**

М.Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік университеті, Шымкент, Қазақстан

### **МАТЛАВ ЖҮЙЕСІН ҚОЛДАНЫП ГИДРОДИНАМИКАДАН КОМПЬЮТЕРЛІК ЗЕРТХАНАЛЫҚ ЖҰМЫСТАРДЫ ОРЫНДАУДЫ ҰЙЫМДАСТЫРУ**

**Аннотация.** MATLAB тілінде есептеулер мен бейнелер тұрғызып компьютерлік зертханалық жұмыстарды орындауды ұйымдастыру ұсынылады: 1) су құйылған, цилиндр ыдыс вертикаль өсте айналған жағдайда, ыдыстың табанындағы қысымның радиус бойында таралуын анықтау және сұйықтың еркін бетінің геометриялық формасын анықтап, бейнелеу, нәтижесін қысымның радиус бойында таралуының айналу өстен қашықтыққа байланысты өзгерісінің графигі ретінде көрсету. Есептеу-қысым қашықтықтың төрт дәрежесі бойынша артатынын көрсетті. Сұйықтың еркін беті – параболоид айналмасы ретінде үшөлшемді кеңістікте салынды. 2) «табанында тесігі бар трубадан аққан сұйық» есебін есептеу мен бейнелеу нәтижесінде сұйықтың ағып шығу жылдамдығы трубадағы «биіктікке» тәуелді болатынын көрсетті. Бұл тәуелділік сұйықтың ағып шығу жылдамдығының «биіктікке» тәуелділік графигі ретінде беріледі.

**Кілттік сөздер.** Еркін жазықтық, қысымның таралуы, параболоид айналмасы.

**NEWS**

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

**PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES**

ISSN 1991-346X

Volume 6, Number 316 (2017), 146 – 153

**S. Baydullaev, S. S. Baydullaev**

Technical College, Shymkent, Kazakhstan;  
Partnership with Limited Responsibility «Kaztransgaz Productions», Shymkent, Kazakhstan  
e-mail: s\_baydullaev@mail.ru; ahmet\_87@bk.ru

**EARTH ELECTRIC CURRENTS WITH DIURNAL PERIODS**

**Abstract.** The goal of research is proving impossibility of generation of respective earth currents due to variations of ionosphere magnetic field with the periods up to 24 hours used in the group of magnetotelluric methods of electric prospecting as well as analysis of possibility of the shorter period variations for studying of earth interior.

The goal has been achieved by means of many years of analysis of production materials as well as theoretical calculation. The results obtained are used for studying the earth interior by the deep-earth methods of electric prospecting.

1. For the first time, it has been proven on the basis of field experimental materials and theoretically that the earth electric currents with diurnal periods are not present in the earth.

2. For the first time, the formulae for identifying some parameters of idealized waves with diurnal periods have been offered.

3. For the first time it is specified that all the variations of ionosphere magnetic field selected for magnetotelluric methods cannot be utilized for electric prospecting:

- As they are not electromagnetic waves as not belong to time-invariant wave processes;
- due to mutually movable nature of the system “the ionospheric source of magnetic fields” and “the observation point on earth”;
- because they arrive from the space, not from the earth interior bearing information on that with them as reverse outcome of variations having damped in the skin deep to the earth surface has been proven neither experimentally nor theoretically;
- as their magnetic components are observable on the day surface of the Earth, and extremely rare electric (earth, i.e. telluric) components with the period up to two hours are observable in its upper sheet soils only.

4. The factor of dynamo genesis is the cause of the magnetic field diurnal variations waviness, this is genesis due to rotation of the Earth around its axis in relation to immovable  $S_q$ -source situating constantly on the Sun side.

5. The values of the own half period ( $T_0$ ) and power parameters  $\vec{H}(t)$  of  $S_q$ -variation depend on geographic latitude of the observation point as well.

**Key words:** earth interior, geophysics, electrometry, ionosphere magnetic fields, telluric currents.

УДК 550.38

**С. Байдуллаев, С. С. Байдуллаев.**

Технический колледж, Шымкент, Казахстан;  
ТОО «Продукции Казтрансгаза», Шымкент, Казахстан

**ЗЕМНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ТОКИ  
С СУТОЧНЫМИ ПЕРИОДАМИ**

**Аннотация.** Целью работы является доказание не возможности порождения соответствующих земных токов от вариаций ионосферного магнитного поля с периодами длительности одной сутки, применяемые в группе магнитотеллурических методов электроразведки, а также анализ возможностей более короткопериодных вариаций для исследования недр земли.

Этой цели достигли путем проведения многолетних анализов производственных материалов, а также теоретических расчетов. Полученные результаты применяются в исследованиях недр земли глубинными методами электроразведки. Они следующие:

1. Впервые по полевым экспериментальным материалам, а также теоретически доказывается отсутствие земных электрических токов с суточными периодами.

2. Впервые предлагаются формулы для нахождения отдельных параметров идеализированных волн с суточными периодами.

3. Впервые указываются, что все выбираемые для магнитотеллурических методов вариации ионосферного магнитного поля не могут быть использованы для электроразведки:

- потому что не являются электромагнитными волнами, как не принадлежащие к установившимся волновым процессам;

- из-за взаимно-подвижного характера систем «Ионосферный источник магнитных полей» и «Пункт наблюдения на земле»;

- из-за того, что они прибыли из космоса, а не из-под земли, как несущие с собой информации о недрах, так как до сих пор ни экспериментально и ни теоретически не был доказан обратный выход на поверхность земли вариаций, уже погасшихся на скин-глубине.

- потому что их магнитные составляющие наблюдаются только на дневной поверхности земли, а исключительно редкие электрические (*земные, то есть теллурические*) составляющие с периодами до двух часов – в её верхних покровных почвах.

4. Причиной волнообразности суточных вариаций ионосферного магнитного поля является фактор «динамо-генезис», то есть их происхождение из-за вращения земли вокруг своей оси в отношении к не подвижному  $S_q$ -источнику, находящийся постоянно на стороне Солнца.

5. Значения собственного полупериода ( $T_0$ ) и силовых параметров  $\vec{H}(t)$   $S_q$ -вариации также зависят и от географической широты места наблюдения.

**Ключевые слова:** недра земли, геофизика, электрометрия, ионосферные магнитные поля, теллурические токи.

Необходимость повышения эффективности геофизических (*в частности – электроразведочных*) методов, используемые для локальных исследований, требует дальнейшего анализа их теоретических основ. Поэтому здесь излагаются ранее не опубликованные результаты работ по магнитотеллурическим (МТ) методам электроразведки.

В работе рассматривается устоявшееся за всю историю МТ-методов ошибочное мнение о пригодности для электроразведки недра земли когерентных суточных вариаций магнитного поля ионосферы и земных (*теллурических*) токов.

Предлагаемое решение нами было разработано еще в середине 80-х годов. Тогда его некоторые теоретики признали без обсуждения (*Л. Л. Ваньян, 1985 г.*). М.С.Жданов в своей работе также констатировал, что солнечно-суточная вариация и есть результат вращения земли вокруг своей. Однако на практике в МТ-методах до сих пор пользуются такими материалами. В связи с этим данную работу решили опубликовать. К тому еще, данная работа содержит не опубликованные рационализированные формулы.

#### **Суточные $S_q$ -вариации.**

В производственных работах по магнитотеллурическим зондированиям (МТЗ) электроразведки вот уже 50 лет используется  $S_q$ -вариация с суточным периодом (Т) повторения значения горизонтального составляющего  $H(t)$  ионосферного магнитного поля. К тому же,  $S_q$ -вариацию считают как гармоническую электромагнитную волну (ЭМВ) [1].

В связи со сказанным, даем краткие информации об общеизвестных космических явлениях геомагнитных полей, которые в МТ-методах используются как не иссекаемые бесплатные источники энергии для разведки недр земли.

Суточные геомагнитные вариации. Заряженные частицы ионосферы, из-за приливных движений Солнца ( $S_s$ ) и Луны ( $S_L$ ), а также термоприливных движений ( $S_2$ ) атмосферы перемешиваются относительно к силовым линиям магнитного поля земли. Эти процессы приводят к движениям в ионосфере, которые там индуцируют силы Лоренца, действующие на ионы и электроны. Тогда, эти частицы образуют электрическую токовую систему в ионосфере (*фиксированные относительно Солнца*). Образуется аналогичная токовая система с Лунным приливом, фиксированная относительно к Луне. Магнитные вариации, наблюдаемые на регистрирующей станции, перемещающейся под этой токовой системой, будут зависеть от лунного времени. Магнитные поля этих обоих токов меняют напряженность общего геомагнитного поля Земли. Это изменение и есть суточная  $S_q$ -вариация. Появлению ночных  $S_q$ -вариаций ответственны Лунные приливы. При ведении учета записи принято Лунное время.

Лунные вариации имеют полусуточный характер. Эти токовые системы образуются в виде токовых вихрей, которые расположены на каждом полушарии с центрами примерно над  $30^\circ$  геомагнитной широты вблизи полуденного (нулевого) меридиана. Токи текут вокруг этих центров.

Магнитное кроше – внезапное импульсное изменение горизонтальной составляющей геомагнитного поля примерно на 50 нТл с периодом  $T \approx 30$  мин. Оно также наблюдается только на Солнечной стороне земли и обнаруживается во всех составляющих H, D, Z.

Солнечные космические лучи (СКЛ), возникающие при мощных солнечных вспышках, которые на земле могут регистрироваться в течение десятков часов. СКЛ на высоких широтах вызывают дополнительные ионизации ионосферы и заметно уменьшается через 30÷32 ч.

Эффект Форбуша – значительное (до 50%) уменьшение потока галактических космических лучей в области возмущений солнечного ветра в межпланетном пространстве. Понижение происходит примерно на сутки и связано с геомагнитной бурей. Эффект более ярче наблюдается на широтах выше  $60^\circ$ .

Геомагнитные бури – понижение от 100 до нескольких сот нанотесла горизонтального компонента магнитного поля, вызываемое магнитными бурями, которые иногда происходят повсеместно.

Геомагнитные микропульсации. В космической части магнитного поля земли иногда происходят флуктуации. Их периоды колеблется от долей секунды до десятков минут, а амплитуды от десятков долей нанотесла до нескольких сот нанотесла в высоких широтах с продолжительностью от нескольких минут до часа и более.

Суббуря – геомагнитное возмущение длительностью 1–2 часа, проявляющееся в «бухтообразном» падении горизонтальной составляющей геомагнитного поля.

Каждое из перечисленных явлений вносит свой существенный вклад в формировании длиннопериодных (можно говорить и всех) вариаций геомагнитного поля земли. Не один из них не является управляемым, и поэтому нельзя ожидать от них гармонических электромагнитных волн (ЭМВ) на поверхности земли. Это значит, что с космического бесплатного источника необходимые нам гармонические ЭМВ на землю не падают.

Для окончательного убеждения в правдивости вышесказанных предположений и расчетов ушли годы. Во всех полевых материалах (магнитотеллурограммах) всех годов мы не встречали длиннопериодных ЭМВ. Далее, в результате долгих анализов полевых данных, полученные нами в Центральных Кызылкумах, Ферганской долине, Кураминских горах, Приташкентские районы, Чардаре, а также магнитограмм, любезно предоставленные коллегами из ПГО «Узбекгеофизика» (ген. дир. д.г.-м.н., проф. Бабаджанов Т.Л. – Кызылкумы, Гиссарские горы), из ТашГУ (с.н.с. Аширматов А.С., – Центральные Кызылкумы, Шардара, Прибалхашье, Северо-Восточный Казахстан, Западная Украина), из КазПТИ (д.г.-м.н., проф. Альмуханбетов Дж.А., к.г.-м.н. доц. Каримов К.М. – Казахстан), из ИЗМИР АН СССР (к.т.н. Бобров В.Н., д.ф.-м.н. Файнберг Э.Б. – Монголия, Болгария, Польша, Армения, Индия), из ИГ Урал.отд. АН СССР (д.ф.-м.н. Хачай О.А. – Башкирия), по различным широтам и геологическим провинциям, мы не нашли даже одну магнитотеллурограмму, которая имела бы записи ЭМВ с суточными периодами. По этим фактическим материалам электрические ( $E_{x,y}$  – теллурические) составляющие ЭМВ с суточными периодами отсутствует вообще (рис.1). В перечисленных материалах также не увидели не только ЭМВ с суточными, но и волн с более короткими периодами. Поэтому практически для всех мест земного шара приведенная на рис.1 картина по электрическим составляющим ( $E_{x,y}$ ) земных (теллурических) токов является обобщающей.



Рисунок 1 - 18–19.11.1985г. пл. Мютенбай в районе месторождения Мурунтау, Центральные Кызылкумы

А по магнитной части, даже не электромагнитные волны, а вариации магнитного поля с периодами от  $T=15 \div 20$  минут до  $T=1,5 \div 2$ -х часов, также не регулярны. В силу вышесказанных о ионосферных геомагнитных явлениях, увиденные на рис.1, вариации магнитного поля ( $H_{x,y,z}$ ) могут иметь разнообразные формы, интенсивности и длительности, то есть периода. Отсутствие на земле электрических составляющих говорит о том, что на её поверхностной почве (*не говоря уж о недрах*) от такой вариации соответствующий длиннопериодный электрический (*теллурический*) ток не индуцируется.

В самом деле, ионосферные вариации магнитного поля непосредственно отражают магнитные ситуации в самом космосе на очаге их формирования, то есть в самой ионосфере, и ни как не показывают геоэлектрическую ситуацию в недрах земли. Для этого у нее не достаточны многие физические параметры, в том числе и силы Лоренца.  $S_q$ -вариация может возбудить электрический ток заряженных частиц только там, где она сама формировалась, то есть в ионосфере, на высоте около 100 км. Записи магнитотеллурограмм на земле всегда и везде покажут подобную ситуацию, которая отражена на рис.1. В связи с этим, такая вариация магнитного поля, тем более - без электрических составляющих на земле, не может быть использована в производственных работах по МТЗ, так как вся теория МТ-методов написана только для устоявшихся волновых процессов. Поэтому, мы здесь сочли достаточным привести только одного рисунка для примера.

Как известно, в природе идеальной как гармонической, так и плоской волны не существует. Любая плоская электромагнитная волна может остаться плоской только там, где она распространяется без поглощения и дисперсии, например – в космосе и/или атмосфере. Даже отсюда ясно, что вариации МТ-поля в проводящей, в том числе и в земной среде ни как не может распространяться. Электрические земные токи могут протекать только по поверхности проводника, то есть в нашем случае – по поверхности проводящего покрова земли. Для ЭМВ поглощающей является проводящая среда, каковыми и есть земные слои. Это вытекает и из теоремы Остроградского-Гаусса. Еще нужно помнить, что все слои земли являются диспергирующими.

Однако, если рассматриваемые процессы были бы (*то есть по  $E$  и  $H$* ) колебательными движениями или волновыми, и имели бы еще когерентность, тогда можно было бы рассмотреть возможности их совместной обработки с целью электроразведки. А в вариациях ионосферных магнитных полей находить признаки когерентности по принятым критериям не возможно. Также известно, что даже когерентность является логическим предположением, а не физическим законом. Поэтому она не может быть доказательным основанием какого-либо процесса, а может быть лишь косвенным свидетельством. С картины (рис.1) видно, что электрические ( $E$ ) и магнитные ( $H$ ) составляющие регистрируемых космических электромагнитных полей (ЭМП) ни как не имеют когерентности. В противном случае, можно было бы говорить об их общем генезисе, а в дальнейшем – и о возможности их совместной обработки путем сложения (*по признакам когерентности*) или разложения (*по Фурье-преобразованию*) и т.д. Все увиденные нами фактические вышеперечисленные материалы не дают доказательных основ на какие-либо действия в пользу МТ-методов. На основе этих заключений и в результате сопоставлений их с другими полевыми данными, приходим к выводу, имеющий важное практическое значение об отсутствии в природе электромагнитных волн, тем более – производных от них земных (*теллурических*) токов, с периодами длительности одной сутки по обоим составляющим ( $E$  и  $H$ ).

Однако, более короткие вариации с периодом до  $1 \div 1,5$  часов ионосферного магнитного поля изредка встречаются. Еще реже встречаются квазикогерентные им  $E$ -составляющие. Тем не менее, как выше сказали, когерентность нам не дает основание их совместной обработки. Потому что, на это есть многие причины, например, в теории МТЗ не доказаны, что регистрируемые на поверхности земли ЭМВ ионосферного происхождения уже имели путь пробега по глубинным слоям недр земли, то есть они к регистрирующим аппаратам прибыли ли непосредственно из-под земли, а не из космоса. К тому еще до сих пор ни экспериментально и ни теоретически не были доказаны обратный выход на поверхность земли вариаций, уже погасшихся там на скин-глубине. В теории также не указаны принципы их отражения от глубинных слоёв недр земли: то ли это зеркально-лучевое или индукционное?

**Некоторые новые расчеты по  $S_q$ -вариациям.**

Относительно идеальную (гармоническую) форму ЭМВ можно было бы ожидать при других обстоятельствах. Ниже рассматривается такой вариант, при котором характеристики ожидаемых волн зависят от следующих параметров –  $\theta_n$ ,  $\theta_{sq}$ ,  $h$  и  $R$ .

Регистрирующая МТ-станция на пункте наблюдения, находясь на разных широтах ( $\theta_n$ ), при вращении земли вокруг своей оси под «нулевым меридианом» не подвижного  $S_q$ -источника относительно к Солнцу, будет пересекать усеченную шаровую сферу его влияния (рис.2). Станция может проходить по разным длинам дуг ( $\ell$ ) этой сферы по плоскостям земных параллелей. Длительность ( $\Delta t$ ) прохождения станции по этой дуге ( $\ell$ ) определяет вместимости максимального периода ( $T_0^{max}$ ) вариации в этот отрезок времени.

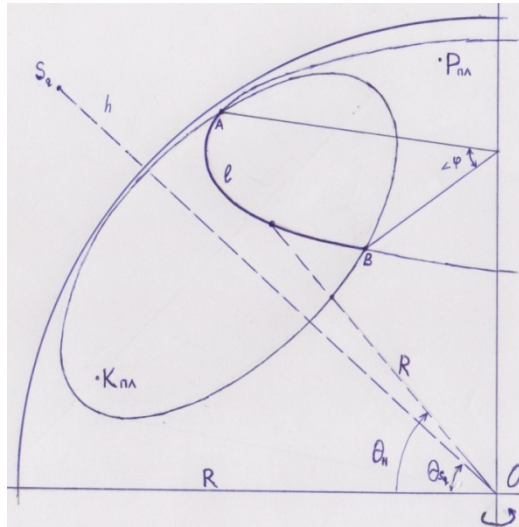


Рисунок 2

Естественно предположить, что  $S_q$ -источник находясь на высоте примерно  $h=115$  км над определенными широтами ( $\theta_{sq} \approx \pm 30^\circ$ ) земной поверхности [2], воздействует на усеченную сферу земного шара с круговым основанием  $\cdot K$ . Зависимость  $\Delta t = f(h)$  объясняется просто – чем выше находится источник, тем шире и дольше его сфера воздействия. Производная зависимость от этой функции будет  $T_0 = f(h)$ . Таким образом, определяя длину дуги ( $\ell$ ) по плоскости  $\cdot P_{пл}$  параллели Земли, можно находить максимально возможного наблюдаемого времени прохождения одиночного импульса с  $T_0$ . Для такого случая справедлива следующая пропорция:

$$\ell \propto \Delta t \approx T_0 \propto \angle \varphi. \tag{1}$$

Эта пропорция связана между собой и через соотношение  $\omega = \frac{\angle \varphi}{\Delta t}$ . Здесь также можно увидеть прямую функциональную зависимость  $T_0 = f(\angle \varphi)$ .

Для того, чтобы вычислить некоторых теоретических данных, например – максимального полупериода прохождения волны по сфере его действия, предлагаем следующую формулу.

$$T_0 = k \cdot 2 \operatorname{Arcsin} \frac{\sqrt{-ax^2 + bx - c}}{y} \tag{2}$$

здесь постоянные коэффициенты имеют следующие значения:

$$a = \frac{1}{\cos^2 \theta_{sq}}; \quad b = \frac{2R}{R+h} \cdot \frac{\operatorname{tg} \theta_{sq}}{\cos \theta_{sq}}; \quad c = \left( \frac{\frac{R}{R+h}}{\cos \theta_{sq}} \right)^2 - 1. \tag{3}$$

Эти коэффициенты – есть соотношения некоторых геометрических параметров земли и  $S_q$ -источника, определяющие их взаиморасположения друг к другу, которые используются при нахождении центрального угла  $\angle \varphi$ . А переменные  $x = \sin \theta_n$  и  $y = \cos \theta_n$  – параметры места наблюдения,  $k = \frac{1}{\omega}$  – коэффициент, связанный с угловой скорости земли. Здесь угловая скорость считается относительно постоянным ( $\omega = \operatorname{const}$ ), а явление нутации и Чандлеровские движения не учитываются, т.к. их учет существенных погрешностей к расчетам не вносят.

Для общего случая уравнение (2) можно написать в следующей форме с четырьмя неизвестными:

$$T_0 = f(R, h, \theta_n, \theta_{S_q}), \quad (4)$$

где:  $\theta_n$  – широта места нахождения МТ-станции на поверхности земли для наблюдения за  $S_q$ -вариацией в угловых единицах, равная углу, отсчитываемая от плоскости Экватора до места нахождения станции;  $\theta_{S_q}$  – фиксированная широта, над которой находится  $S_q$ -источник, а его местоположение в своей очереди фиксировано к стороне Солнца;  $R$  – средний радиус земли;  $h$  – высота места нахождения  $S_q$ -источника от поверхности земли.

В природе наблюдаемые формы записей длиннопериодных вариаций на магнитограммах с их желаемой (*гармонической*) графикой не совпадают. Поэтому для получения совпадающих данных, или хотя бы для их аппроксимации, необходимы условия, при которых через уравнение (2) можно было бы теоретически рассчитать данные для  $S_q$ -вариации. Оно выполняется тогда, когда  $\theta_n = \theta_{S_q} \rightarrow 0^\circ$ , и как следствие, должны выполняться условия

$$\ell \rightarrow \pi R; h \rightarrow \infty; \angle \varphi \rightarrow \pi; T_0 \rightarrow T/2. \quad (5)$$

Тогда, с учетом этих значений, коэффициенты по формуле (3) будут равны:  $a = 1$ ;  $b = 0$ ;  $c = -1$ ;  $x = 0$ ;  $y = 1$ .

В формуле (2) второй множитель является центральным углом. Поэтому, это уравнение, для определения соответствующих граничных условий, примет вид тождества:

$$\angle \varphi = 2 \operatorname{Arcsin} \frac{\sqrt{-ax^2+bx-c}}{y} = \pi, \quad (6)$$

или же что соответствует к:

$$-a \sin^2 \theta_n + b \sin \theta_n - c = \cos^2 \theta_n \quad (7)$$

Решая уравнение (7), можно находить при каких  $R, h, \theta_n, \theta_{S_q}$  будет выполняться условие  $T=2T_0$ , то есть можем теоретически ожидать «полноценную суточную  $S_q$ -волну». Решение следующее:

$$\sin \theta_{n1,2} = -\frac{R}{R+h} \cdot \frac{(-1 \pm \sqrt{2})}{\sin \theta_{S_q}}, \quad (8)$$

Здесь формула (8) служит для нахождения широты места наблюдения, где можно ожидать «теоретическую (*гармоническую*)  $S_q$ -волну» с максимальным периодом.

Для нашего случая, когда используем имеющиеся земные параметры, получим

$\theta_n = \pm 54,46284^\circ$  при  $h=115$  км. Это значит, что только за пределами этой широты можно будет теоретически ожидать ЭМВ с суточным периодом. На практике, начиная именно с таких высоких широт, наблюдаются длиннопериодные  $S_q$ -вариации.

Теперь, вычислим ожидаемый период суточных  $S_q$ -волн для идеального случая, когда  $\theta_n = \theta_{S_q} = 0^\circ$ :

$$T = 2T_0 = 2k \cdot 2 \operatorname{Arcsin} \frac{\sqrt{-ax^2+bx-c}}{y} = \frac{4}{\omega} \operatorname{Arcsin} \frac{\sqrt{1}}{1} = \frac{4}{\omega} \frac{\pi}{2} = \frac{4\pi T}{4\pi} = T, \text{ что и требовалось доказать.}$$

Смысл данного решения означает, что для формирования теоретических волн с длительностью периода одной сутки ( $T$ ), источник ЭМВ должен находиться так далеко ( $h = \infty$ ), чтобы от него обхватывающие землю лучи шли параллельно. Отсюда следует заключение, что источником такой теоретической  $S_q$ -волны может служить только само Солнце или космические лучи. Здесь реален первый Солнечный вариант. Солнце воздействует на измерительные приборы наблюдателя на земле как постоянный магнитный диполь. Только при таком случае, наблюдаемые на земле графики вариаций можно аппроксимировать с теоретической волной.

Для случаев, когда не выполняется условие  $h \rightarrow \infty$ , вычисленная по нашей формуле графика окажется графикой одиночного периодического импульса, собственный период которого меньше суточного полупериода теоретической  $S_q$ -волны. А это уже никак не является непрерывной ЭМВ. Теория МТЗ для такого случая не разработана и поэтому использование такого импульса на практике ожидаемого результата не даст.

И из-за практических измерений земных токов от  $S_q$ -вариации на относительно точечном расстоянии на почве Земли (*то есть, как бы на роторе динамо*), никакая соответствующая напряженность (E) электрического поля (*то есть, земных токов*) там не наблюдается. А практически правильное измерение на взаимно-подвижных системах «вращающаяся Земля» и «неподвижный  $S_q$ -источник», как на динамо-генераторе, не возможно. Если даже было бы возможно, то это никакого результата не дал бы. Поэтому, создание какой-либо модели такого динамо-генератора (*для случая МТ-методов*) бессмысленно.

В математической физике каждую нормальную ЭМВ можно рассматривать как плотного периодического непрерывно-последовательного ряда одинаковых импульсов (*с условием  $T=2T_0$* ). В теории МТЗ понятие периода одиночного импульса ( $T_0$ ) нет, так как она была разработана, как уже выше сказали, для волновых процессов, а не для одиночных периодических импульсов. Как вначале говорилось, в природе практически отсутствует установившийся непрерывный процесс прохождения ЭМВ с необходимым спектром волн. Поэтому на практике, обработчики осуществляют сбор одиночных, не связанных друг с другом длиннопериодных ( $T$ =от нескольких часов до суток) импульсов по предполагаемой когерентности, и вносят их в единый непрерывный периодический ряд, то есть искусственно создают практически не существующую ЭМВ. Известно, что математический закон разложения непрерывного ряда физически обратную силу не имеет, то есть из независимо отстоящих друг от друга импульсов невозможно комплектовать реальную волну. Другими словами – если не существует ЭМВ, то не существует и индукционный ток от него.

Из практики сорокалетних полевых наблюдений нам известно, что в природе отсутствует нормальный ряд электромагнитных импульсов, которого можно было бы принимать за ЭМВ (рис.1). Практически наблюдаемые в природе импульсы бывают значительно отстоящими друг от друга, а какая либо закономерность о длительности промежутка времени между ними также отсутствует, так как они в основном формируются чисто случайным процессом. Поэтому такие импульсы не могут быть использованы для электроразведки.

Однако если даже существовало бы действительная идеальная (*гармоническая*) вариация в виде ЭМВ, отвечающая существующим требованиям МТ-методов, и то без учета преобразования Галилея (*не говоря уж о преобразовании Лоренца*), применение её не приводило бы к правильному результату. Даже по простой логике понятно, что для формирования любого волнообразного импульса, то есть только одного звена волны, не говоря уж об установившемся волновом процессе, необходимо время, по длительности не меньшее чем собственный период ( $T_0$ ) этого импульса. А теперь, если длительность собственного периода этого одного только импульса электромагнитной волны, используемой в МТ-методах, должна доходить до одной суток ( $T_0=24$  часов), тогда постановка вопроса использования такой волны, не говоря уж о преобразовании Галилея или Лоренца для поправки взаимных смещений источника  $S_q$ -вариаций и пункта наблюдения на земле, превратится в абсурд. Этого обеспечивает инвариантность уравнений Максвелла и специальной теории относительности (СТО). При постоянных взаимных смещениях двух систем, то есть когда неподвижный ионосферный  $S_q$ -источник испускает вариаций, а регистрирующий их аппарат на поверхности земли постоянно ускользает из-под него, по преобразовании Лоренца в наблюдаемых ЭМП могут отсутствовать одни составляющие ЭМВ при существовании других. Например, в нашем случае, может отсутствовать E-составляющие при существовании H вектора. Еще, эти преобразования могут учитывать лишь малые подвижки объектов относительно друг к другу. Однако, не смотря на то, что упомянутая инвариантность дает как бы второй шанс в пользу МТ-методов при отсутствии E-составляющих, тем не менее, использование этих преобразований для нашего случая не приемлемо, так как ожидаемое исходное поле не существует. Итак, если даже космические магнитные вариации были бы идеальными волнами, и то не смогли бы вызвать индукционные токи в недрах вращающейся земли.

Для средних широт  $\theta_n = 45^\circ$ ,  $\theta_{S_q} = \pm 30^\circ$  и  $h=115$  км, этот период по рассчитанной нашей формуле может составлять не более чем  $T_0^{max} = \frac{T(h)}{360^\circ} \cdot \angle\varphi^\circ = \frac{24(h)}{360^\circ} \cdot \angle 30,70197^\circ = 2,046798^h \approx 2$  часа. Это полностью соответствует реально наблюдаемым вариациям.

Отсюда следует заключение, что наблюдаемые на земле некие волнообразные изменения напряженности (H) магнитного поля не является электромагнитной волной. Их можно аппроксимировать с напряженностью статического магнитного поля самого Солнца.



В результате проведенных анализов обширных экспериментальных материалов и на основе теоретических расчетов, можно сделать следующие выводы:

1. В природе естественные земные электрические (*теллурических*) токи с суточными периодами не существуют.

2. Все выбираемые для магнитотеллурических методов вариации ионосферного магнитного поля для исследования недр земли не пригодны:

- поскольку не являются волнами, как не принадлежащие к установившимся волновым процессам;

- из-за взаимно-подвижного характера двух систем «Ионосферный источник магнитного поля» и «Пункт наблюдения на земле»;

- из-за того, что они прибыли из космоса, а не из-под земли, как несущие с собой информации о недрах;

3. Причиной волнообразности суточных вариаций ионосферного магнитного поля является фактор «динамо-генезис», то есть их происхождение из-за вращение земли вокруг своей оси в отношении к не подвижному  $S_q$ -источнику, находящийся постоянно на стороне Солнца.

4. Значения собственного полупериода ( $T_0$ ) и силовых параметров  $\vec{H}(t)$   $S_q$ -вариации также зависят и от географической широты места наблюдения.

#### ЛИТЕРАТУРА

[1] Яновский Б. М., Кн. «Земной магнетизм», стр.411, Изд. ленинградского университета, 1978 г.

[2] Яновский Б. М., Кн. «Земной магнетизм», стр.416, Изд. ленинградского университета, 1978 г.

УДК 550.38

**С. Байдуллаев, С.С. Байдуллаев**

Техникалық колледж, Шымкент, Қазақстан,  
«Қазтрансгаз өнімдері» ЖШС, Шымкент, Қазақстан.

#### ЖЕРДІҢ ТӘУЛІК ДӘУІРЛІ ЭЛЕКТР ТОҚТАРЫ

**Аннотация.** Жұмыстың мақсаты – электробарлаудың магнитотеллур әдістері тобында қолданыстағы ионосфералық магнит өрісінің тәулік дәуір ұзындығына ие ауытқуларынан оған сай жер тоқтарының туындауы мүмкін емес екендігін дәлелдеу, сондай ақ, одан қысқа дәуірлі ауытқуларынан жер қойнауын зерттеу мақсатында пайдалану мүмкіндіктерін сұрыптау.

Осы мақсатқа көп жылдық өндірістік мәліметтерді зерттеу мен теориялық есептер жүргізу арқылы жеттік. Алынған нәтижелер жер қойнауын электробарлау әдісімен зерттеу саласында қолданылады. Олар төмендегіше:

1. Далалық тәжірибелік мәліметтер, сондай ақ теориялық тұрғылар негізінде тәулік дәуірлі электрлік жер тоқтарының болмауы алғаш рет дәлелденуде.

2. Тәулік дәуірлі идеалдастырылған толқындардың айырықша параметрлерін табу формулалары алғаш рет ұсынылуда.

3. Магнитотеллур әдістері үшін таңдалатын ионосфералық магнит өрісі ауытқуларының барлығы электробарлауда қолдануға жараксыз екендігі алғаш рет төменде көрсетілуде :

- Себебі олар – толқындардың тұрақтанған үрдістеріне жатпайды, яғни толқындар емес;

- Себебі – «магнит өрісінің ионосфералық көзі» және «жердегі бақылау пункті» құрылымдары өзара жылжымалы мінезге ие;

- Себебі – олар жер қойнауынан мәліметтер жеткізетіндей, жер астынан емес, космостан келіп тұр, сондай ақ, скин-тереңдікте сөніп қалған ауытқулардың жер бетіне қайта шығатыны осы кезге дейін тәжірибемен де теориямен де дәлелден емес;

- Себебі – олардың магниттік құрамдастары жердің тек үстінде ғана, ал, дәуір ұзындығы екі сағатқа әрэн жететін аса сирек кездесетін электрлік (яғни *теллурлық, немесе жерлік тоқтар*) құрамдастары оның беткі қабаттарында ғана болады.

4. Ионосфералық магнит өрісіне тиісті тәулік дәуірлі ауытқулардың толқын сыяқты болуының себебі «динамолық туылу» құбылысы, яғни олардың пайда болуы – әр қашан Күн жағында болатын  $S_q$ -көзіне қатысты жердің өз оғы төңірегінде айналуы.

5.  $S_q$ -ауытқуларының меншікті жартылай дәуірінің ( $T_0$ ) және негізгі параметрлерінің  $\vec{H}(t)$  мәндері жердегі бақылау орнының географиялық кеңістігіне де байланысты.

**Тірек сөздер:** жер қойнауы, геофизика, электробарлау, ионосфералық магнит өрістері, теллур тоқтары.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN  
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 6, Number 316 (2017), 154 – 162

Ye. Moisseyeva<sup>1</sup>, A. Naimanova<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan;

<sup>2</sup>Institute of Mathematics and Mathematical Modeling MES RK, Almaty, Kazakhstan  
E-mail: <sup>1</sup>k.moisseyeva@gmail.com, <sup>2</sup>alt\_naimanova@yahoo.com

**EFFECT OF BOUNDARY LAYER THICKNESS  
AT INLET ON PATTERNS OF INTERACTION  
OF SUPERSONIC FLOW WITH TRANSVERSE INJECTED JET**

**Abstract.** In the paper, the numerical investigation of the supersonic turbulent multispecies flow with transverse jet injection is performed. An effect of the boundary layer thickness at the inlet on the vortex system and mixing layer is studied. The value of the boundary layer thickness, for which there is an additional multi-structural separation zone ahead of the jet, is determined; the new vortices in front of the jet are identified. It is shown that with decreasing the thickness of the boundary layer at the inlet, the number of vortices in front of the jet is reduced, while additional vortex structures form behind the jet. An effect of the vortex systems on the jet / main flow mixing is revealed.

**Keywords:** turbulence, boundary layer, mixing layer, supersonic flow, transverse injection.

УДК: 533.6.011.5: 532.526

Е.С. Моисеева<sup>1</sup>, А.Ж. Найманова<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан

<sup>2</sup>Институт математики и математического моделирования МОН РК, Алматы, Казахстан

**ВЛИЯНИЕ ТОЛЩИНЫ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НА ВХОДЕ  
НА МЕХАНИЗМЫ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СВЕРХЗВУКОВОГО  
ПОТОКА С ПОПЕРЕЧНО ВДУВАЕМОЙ СТРУЕЙ**

**Аннотация.** В данной работе выполнено численное исследование сверхзвукового течения многокомпонентной газовой смеси с поперечным вдувом струи. Изучено влияние толщины пограничного слоя на входе на вихревую систему и слой смешения. Определено значение толщины пограничного слоя, при котором возникает дополнительная многоструктурная область отрыва перед струей, получены новые вихревые системы перед струей. Показано, что при уменьшении толщины пограничного слоя на входе количество вихрей перед струей сокращается, тогда как за струей появляются дополнительные вихревые структуры. Выявлено влияние вихревых систем на процесс смешения вдуваемой струи и натекающего потока.

**Ключевые слова:** турбулентность, пограничный слой, слой смешения, сверхзвуковое течение, поперечный вдув.

**1. Введение.** Поперечный вдув струи в поток является эффективным способом сверхзвукового смешения и горения в сверхзвуковых камерах сгорания. На практике проблема взаимодействия газовой струи со сверхзвуковым потоком является основной в моделировании сверхзвуковых камер сгорания. Поле течения в такого рода установках достаточно сложное: турбулентное перемешивание топлива с окислителем, химические реакции, ударные волны, отрывная зона перед струей и за ней. Анализ влияния режимных параметров на механизмы взаимодействия струи и

потока, например, параметра нерасчетности, типа вдуваемого газа, местоположения вдува или толщины пограничного слоя, задаваемой на входе при расчете течения, позволяет улучшить эффективность сверхзвукового смешения. Однако при этом до настоящего момента не изучено в полной мере влияние толщины пограничного слоя на слой смешения.

Общая структура картины течения сверхзвукового потока с поперечно вдуваемой струей показана на рисунке 1 [1]. Турбулентный пограничный слой перед струей характеризуется парой противоположно вращающихся вихрей [1-3]. Эти вихри сносятся вниз по течению основным потоком, образуя подковообразные вихри и вихревой след в области за вдувом струи. Однако известны некоторые работы [2,4-8], в которых показаны дополнительные вихревые структуры в зависимости от режимных и геометрических параметров. Целью настоящей работы является изучение влияния толщины пограничного слоя на входе на механизмы взаимодействия струи и потока, в частности, на формирование вихревых систем за вдувом, которые определяются состоянием пограничного слоя перед струей и влияют на слой смешения.

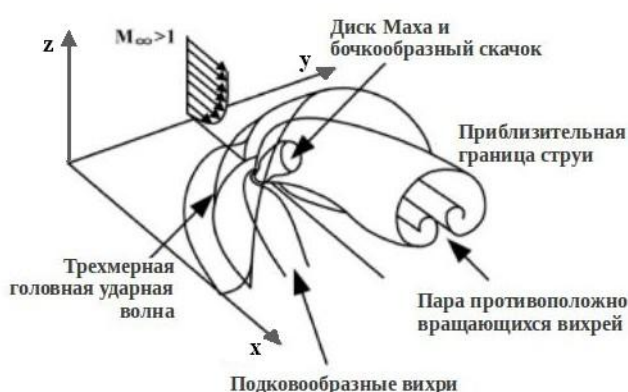


Рисунок 1 – Схематическое изображение поперечного вдува струи в сверхзвуковой поток [1]

**2. Математическая модель и численный метод решения.** Исходными уравнениями для рассматриваемой задачи является система осредненных по Фавру уравнений Навье-Стокса для многокомпонентного турбулентного газа. Характерным параметром длины является диаметр сопла. Коэффициент динамической вязкости определяется как сумма коэффициентов молекулярной и турбулентной вязкости, где молекулярная вязкость определяется по формуле Уилке [9], а турбулентная вычисляется с помощью  $k-\omega$  модели с учетом сжимаемости. На входе задаются параметры воздушного потока и вблизи стенки пограничный слой, на вдуве струи – параметры струи водорода. На нижней стенке выполняются условия прилипания и теплоизоляции, на верхней границе – условие симметрии, на боковых – мягкие граничные условия, и на выходной границе задаются условия неотражения [10].

Численное решение поставленной задачи осуществляется на основе существенно-неосциллирующей ENO-схемы третьего порядка точности, методология может быть найдена, например, в работах [11-12]. Решение полученной системы разностных уравнений осуществляется согласно принципу расщепления по направлениям методом матричной прогонки.

**3. Результаты.** Для верификации математической модели и апробации численного метода предварительно решается задача пространственного сверхзвукового турбулентного течения воздуха в канале с характерными параметрами, соответствующими эксперименту [13]:  $Pr = 0.9$ ,  $\gamma = 1.4$ ,  $Re = 6.31 \cdot 10^4$ ,  $M_\infty = 4$ ,  $T_\infty = 500K$ , индекс « $\infty$ » относится к параметрам потока. На рисунке 2 представлены основные характеристики течения в пограничном слое – распределение давления и профиль продольной скорости. Измерение проводится вблизи стенки в плоскости симметрии, нормальной к оси  $y$ , в сечении, где толщина пограничного слоя равна  $\delta=2.7$  ( $z^+ = 5694$ ). Здесь  $z^+ = zu_\tau Re$  – универсальная динамическая переменная,  $u_\tau = (0.5C_f)^{1/2}$

– динамическая скорость,  $C_f = 0.0576(\text{Re } x)^{-1/5}$  – местный коэффициент сопротивления на стенке [14]. Из графика видно, что распределение давления (рисунок 2а) и профиль скорости (рисунок 2б) удовлетворительно согласуются с результатами работ [13,15-16].

Далее, для расчета поставленной задачи перпендикулярного вдува круглой струи водорода в трехмерный канал (рисунок 1) центр сопла помещается согласно [13] в сечении, соответствующем толщине пограничного слоя в канале  $\delta_0=2.7$ . Параметры струи также задаются в соответствии с экспериментом [13]:  $M_0 = 1$ ,  $T_0 = 1300\text{K}$ ; отношение динамических давлений  $q \equiv \rho_0 \vec{V}_0^2 / \rho_\infty \vec{V}_\infty^2 = 1.0$ , что соответствует  $n = 15.61$ ;  $d = 1.05\text{мм}$ , индекс «0» относится к параметрам струи. Расчеты проводятся со следующими геометрическими параметрами:  $H_x = 20$  – длина,  $H_y = 15$  – ширина и  $H_z = 10$  – высота расчетной области в калибрах;  $x_0 = 10$ ,  $y_0 = 7.5$  – расстояние от начала расчетной области до центра сопла.

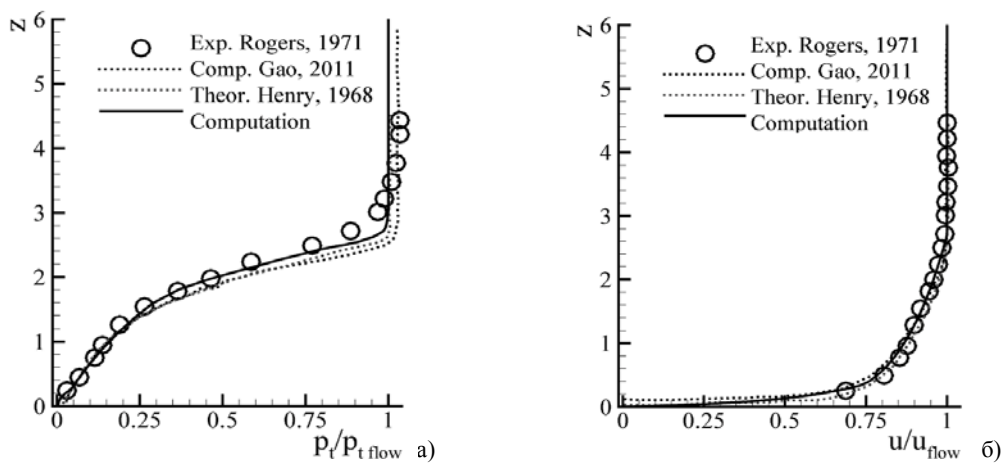


Рисунок 2 – Характеристики пограничного слоя в канале без вдува струи на стенке в плоскости симметрии, нормальной к оси  $y$ , результаты работ [13,15-16] и численный расчет: а) распределение полного давления, б) профиль скорости

На рисунке 3 показано поле изобар в плоскости симметрии, нормальной к оси. Вследствие торможения потока перед струей повышается давление и возникает головной скачок уплотнения 1. Вверх по течению от него отходит косой скачок уплотнения 2, за которым наблюдается зона сверхзвукового течения. Последующее торможение потока сопровождается повышением давления и появлением ударной волны – замыкающего скачка уплотнения 3, параллельного оси струи. Вследствие пересечения ударных волн 1, 2 и 3 образуется сложная  $\lambda$ -образная структура волн.

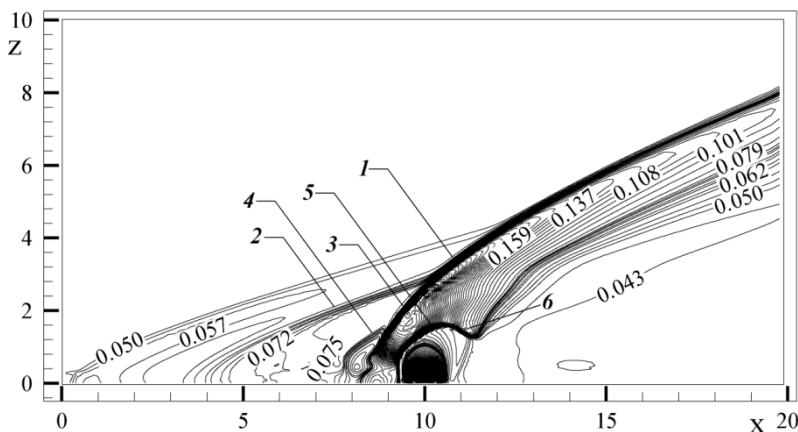


Рисунок 3 – Изобары в плоскости симметрии, нормальной к оси  $y$ ,  $\delta_0=2.7$

В передней застойной зоне давление понижается (линия 4) ввиду наибольшей скорости возвратного течения. За струей находится зона разрежения. На рисунке также виден висячий скачок 5. Его формирование обусловлено тем, что в результате вдува недорасширенной струи в поток давление в струе стремится выровняться с давлением окружающей среды, вследствие чего происходит расширение струи и образуются волны разрежения, которые движутся к границам струи. Семейство отраженных от границы струи волн разрежения формирует висячий скачок 5, замыкающийся диском Маха 6.

На рисунке 4 представлены линии тока и распределение массовой концентрации водорода в плоскости симметрии, нормальной к оси  $y$ . В большинстве известных работ, например, [1-3], рассматривается структура течения перед струей, состоящая только из двух подковообразных вихрей, существует также несколько работ, в которых описан третичный вихрь [2,4-6], однако здесь показано формирование двух пар вихрей ( $V_1$ - $V_4$ ,  $V_2$ - $V_3$ ). При этом вихри  $V_2$  и  $V_3$ , примыкающие к стенке, вращаются против часовой стрелки, а вихри  $V_1$  и  $V_4$  – по часовой стрелке. Рассмотрим подробно механизм их образования.

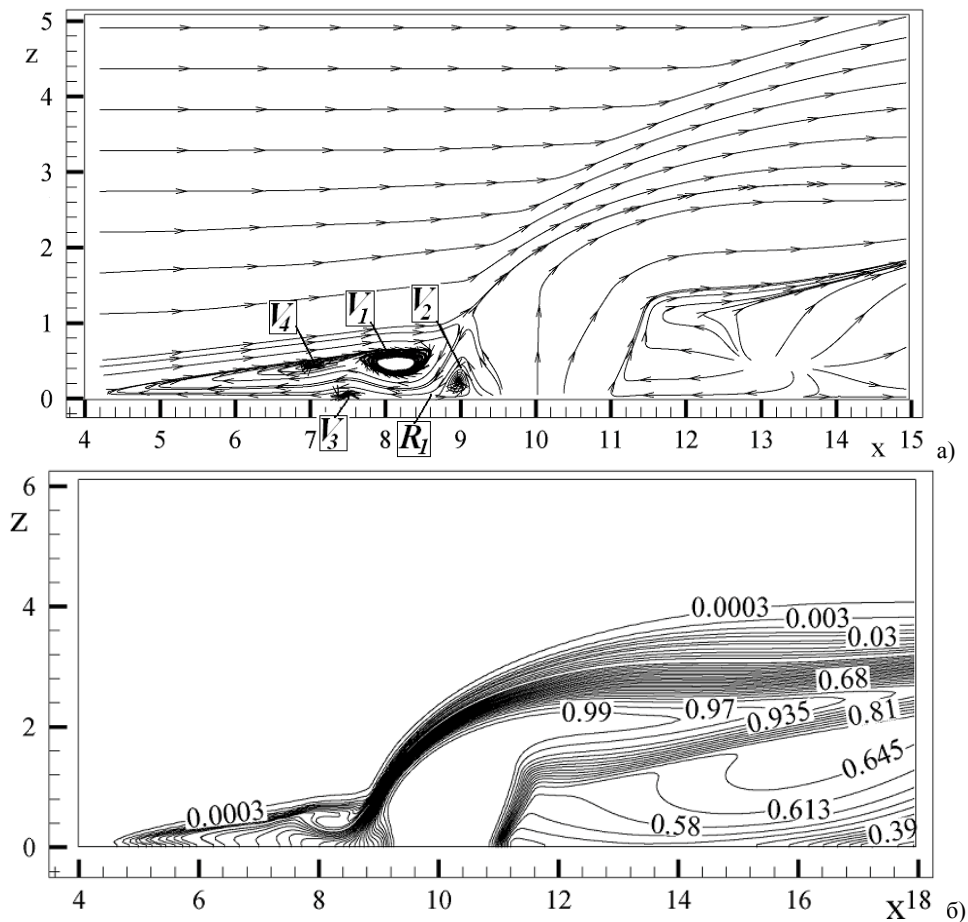


Рисунок 4 – Линии тока (а) и распределение массовой концентрации водорода (б) в плоскости симметрии, нормальной к оси  $y$ ,  $\delta_0=2.7$

Первый вихрь  $V_1$  формируется вследствие отрыва пограничного слоя перед струей. Взаимодействие расширяющейся струи и замыкающего скачка уплотнения 3 на рисунке 3 приводит к появлению второго вихря  $V_2$ . При этом из графика 4а видно, что эти вихри вращаются в противоположных направлениях. Очевидно, это объясняется тем, что часть потока воздуха непосредственно вблизи стенки, проходя участки скачков уплотнения, поворачивает вниз к стенке и проникает в зону отрывного течения, а затем растекается в противоположных направлениях, в результате чего образуется линия растекания потоков  $R_1$ . При тчении газа в обратном

направлении от линии растекания  $R_1$  пограничный слой повторно отрывается с образованием вихря  $V_3$ . Очевидно, этот отрыв обусловлен ростом градиента давления вследствие следа слабого скачка 4 на рисунке 3. Далее поток отклоняется вверх из-за присутствия вихря  $V_3$ , тогда как сверху на вихрь  $V_1$  натекает основной поток, вследствие чего происходит пережим вихря  $V_1$  и он разделяется на два с появлением вихря  $V_4$ .

Влияние вихревой системы перед струей на процесс смешения струи и потока демонстрирует картина распространения массовых концентраций водорода. Так, из графика 4б видно, что часть водорода в области перед струей захватывается подковообразными вихрями  $V_1$ - $V_2$  и распределяется вверх по потоку вплоть до линии отрыва.

На рисунке 5 показаны линии тока и распределение массовой концентрации водорода за струей в плоскости  $yz$  ( $x=13.835$ ). Появление пары симметричных вихрей  $V_5$  обусловлено тем, что непосредственно за струей у стенки образуется область пониженного давления, куда устремляется натекающий поток. Вихрь  $V_1$  перед струей увлекается основным потоком и, разделяясь, генерирует систему  $V_6$ . Вихри  $V_7$  формируются вследствие бокового перетекания вихря  $V_3$ . Незначительный размер этих вихрей обусловлен тем, что размер порождающего их вихря  $V_3$  также мал. Пара вихрей  $V_8$  генерируется вихрем  $V_2$ .

Расчеты показывают, что за бочкообразной структурой за струей вихри  $V_8$  смещаются к плоскости симметрии, а вихревые системы  $V_6$  и  $V_7$  удаляются от плоскости симметрии по мере их сноса вниз по потоку. Вихри  $V_8$  с центрами вращения в слое смешения струи и потока, обтекая струю, увеличиваются в размере по мере их сноса вниз по потоку. Увеличение размеров этих вихрей вблизи струи, по всей видимости, обеспечивается наличием существенных градиентов давлений на границе струи и потока. Из рисунка 5а также заметно, что вихревые системы  $V_6$  и  $V_7$  служат своего рода кавернами для роста вихря  $V_8$ , т.е. по мере удаления от плоскости симметрии вихрей  $V_6$  и  $V_7$ , каверна увеличивается, соответственно вихрь  $V_8$  расширяется.

Рисунок 5б демонстрирует влияние боковых вихрей на расширение струи. С удалением от дуды вниз по потоку ядро максимальных концентраций уменьшается, а область смешения расширяется. Из сравнения рисунка 5а с рисунком 5б видно, что водород в основном скапливается в области вихрей  $V_8$ . Здесь также можно увидеть роль вихрей  $V_6$  и  $V_7$ , образующих каверну. При этом численные расчеты показывают, что основной вклад в смешение струи и потока вносят подковообразные вихри  $V_6$  и  $V_8$ .

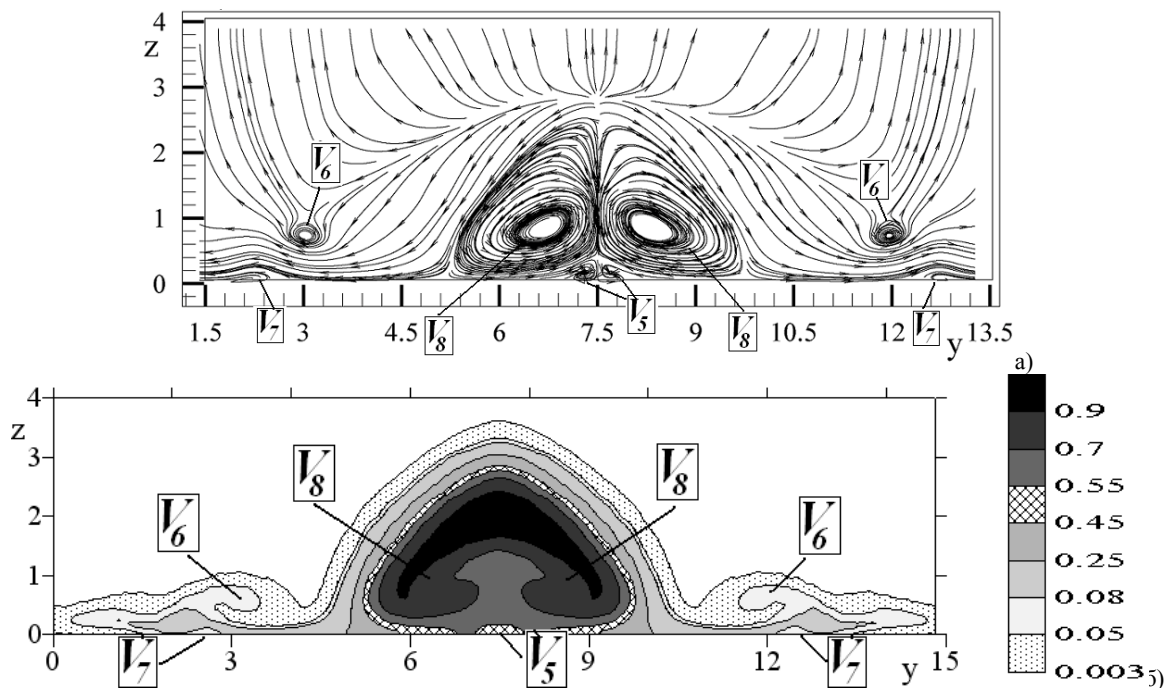


Рисунок 5 – Линии тока (а) и распределение массовой концентрации водорода (б) в сечении  $x=13.835$ , нормальной к оси  $x$ ,  $\delta_0=2.7$

Следует отметить, что в работе [7] были получены дополнительные вихревые системы в верхней и нижней частях области смешения за струей для задачи вдува одноатомного газа с параметрами нерасчетности  $n=10$  и более. Однако приведенный выше анализ показывает, что в настоящем исследовании дополнительные вихревые системы в этих областях не наблюдаются. По-видимому, отсутствие этих вихрей обусловлено тем, что здесь расчеты производились с пограничным слоем на входе толщиной  $\delta_0=2.6$ , тогда как в [7] его толщина задавалась  $\delta_0=1$ ,  $Re=1.87 \cdot 10^7$ .

Численные эксперименты, выполненные при меньших значениях толщины пограничного слоя, показывают уменьшение числа вихрей перед струей. К примеру, ниже (рисунки 6-8) приводятся результаты расчетов для случая, когда центр вдува струи помещается в точке, где толщина пограничного слоя в канале  $\delta_0=0.616$ . Для картины распределения изобар в плоскости симметрии (рисунок 6) не наблюдается заметного качественного расхождения с вышеописанным (рисунок 2). Однако в этом случае расчеты демонстрируют наличие только двух вихрей  $V_1$  и  $V_2$  и отклонение линий тока вблизи стенки (рисунок 7а). Видно, что отклонение потока от отрыва является недостаточным для разделения вихря  $V_1$ . За струей рисунок 7а демонстрирует возникновение у основания диска Маха вихря  $V_9$ , который и наблюдался в работе [7]. Формирование этого вихря обусловлено взаимодействием струи и восходящего потока под струей. В поперечном сечении (рисунок 8а) вихревые системы качественно не отличаются от систем для  $\delta_0=2.7$  (рисунок 5а).

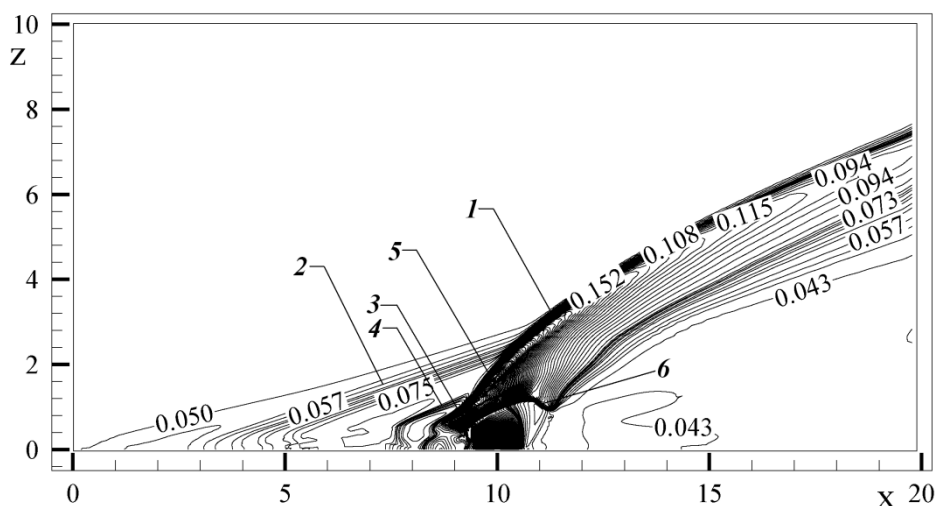


Рисунок 6 – Изобары в плоскости симметрии, нормальной к оси  $y$ ,  $\delta_0=0.616$

Из сравнения рисунков 4б и 7б видно, что при «тонком» пограничном слое подковообразные вихри выносят водород дальше вверх по потоку (перед струей), чем при «толстом». За вдувом струи при  $\delta_0=2.7$  в области вблизи стенки наблюдается как водород, так и воздух, тогда как при  $\delta_0=0.616$  только водород, т.е. в этом случае значения массовой концентрации водорода вблизи стенки значительно выше ( $Y_1=0.903$  при  $\delta_0=0.616$ ,  $Y_1=0.39$  при  $\delta_0=2.7$ ). Таким образом, при «тонком» пограничном слое смешение в основном происходит в верхней части слоя смешения, а большая часть водорода сконцентрирована вблизи стенки. Кроме того, сравнение рисунков 4б и 7б также показывает незначительное увеличение высоты проникновения водорода при  $\delta_0=0.616$ . В поперечном сечении ( $x=13.385$ , рисунки 5б, 8б), слой смешения при  $\delta_0=2.7$  больше, чем при  $\delta_0=0.616$ . Максимальные значения массовой концентрации водорода при  $\delta_0=2.7$  локализованы в ядре струи, тогда как при  $\delta_0=0.616$  значение  $Y_1=0.55$  достигает боковых границ.

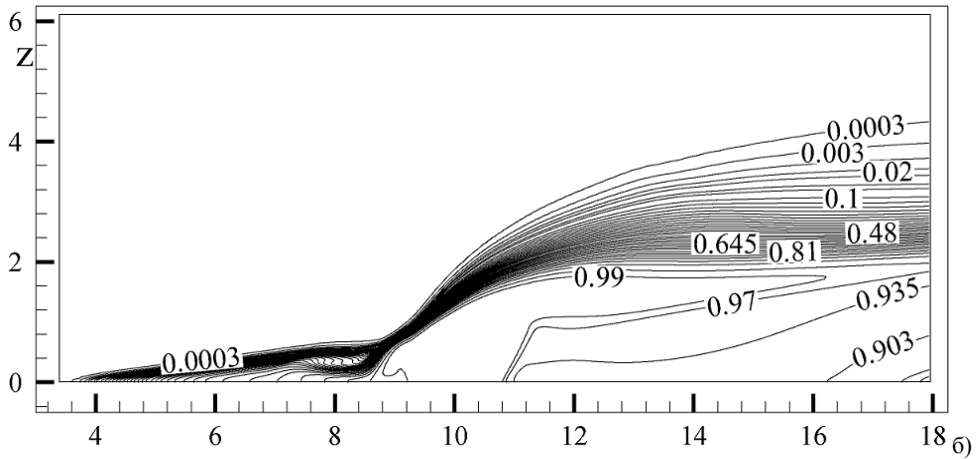
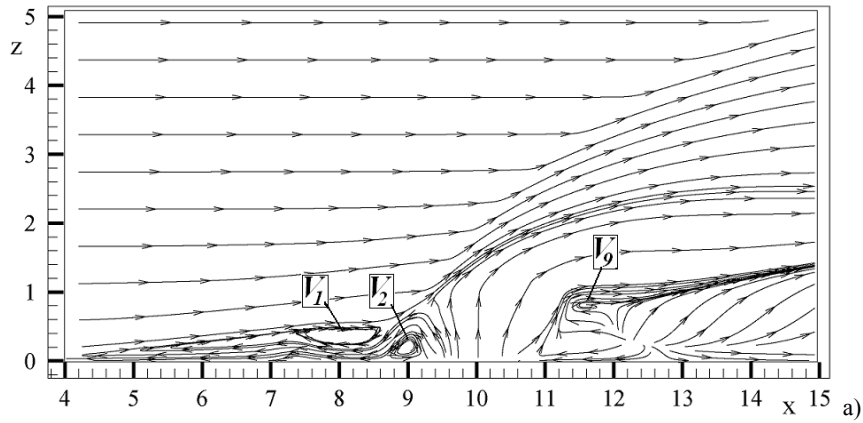


Рисунок 7 – Линии тока (а) и распределение массовой концентрации водорода (б) в плоскости симметрии, нормальной к оси  $y$ ,  $\delta_0=0.616$

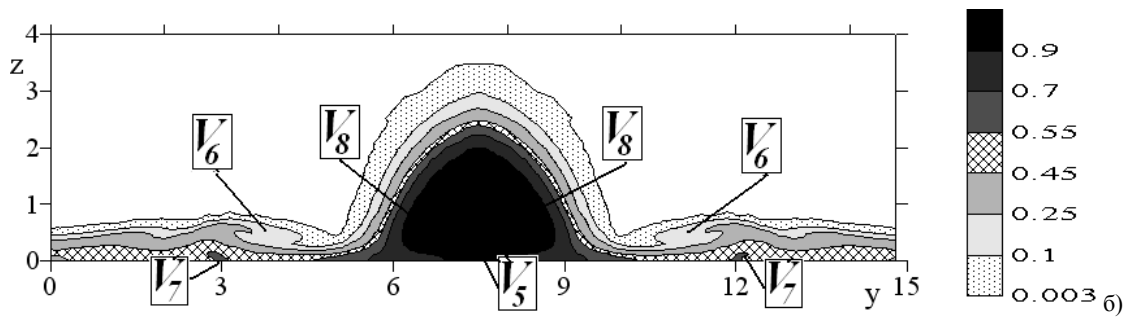
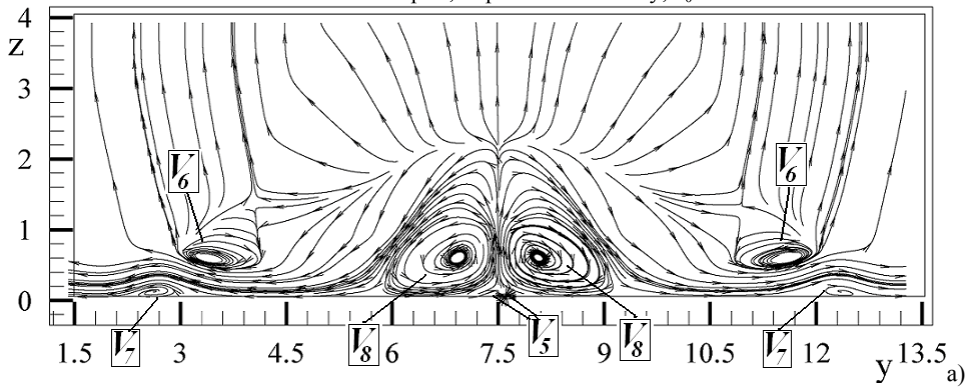


Рисунок 8 – Линии тока (а) и распределение массовой концентрации водорода (б) в сечении  $x=13.835$ , нормальной к оси  $x$ ,  $\delta_0=0.616$

**Заключение.** Вычислительные эксперименты, проведенные с целью выявить механизмы



образования вихревых систем, показали, что толщина пограничного слоя оказывает существенное влияние на вихревую структуру и слой смешения. Однако необходимы дальнейшие исследования в отношении отрывной зоны. Таким образом, следующий этап работы будет направлен на сравнение распределения давления на стенке с экспериментальными данными для количественной оценки длины зоны отрыва и подтверждения присутствия дополнительных вихрей.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Gruber MR, Nejad AS, Chen TH, Dutton JC. (2000) Transverse injection from circular and elliptic nozzles into a supersonic crossflow, *J Propul Power*, 16:449-457. DOI: 10.2514/2.5609
- [2] Erdem E, Kontis K. (2010) Numerical and experimental investigation of transverse injection flows, *Shock Waves*, 20:103-118. DOI: 10.1007/s00193-010-0247-1
- [3] Viti V, Neel R, Schetz J. (2009) Detailed flow physics of the supersonic jet interaction flow field, *Phys Fluids*, 21:1-16. DOI: 10.1063/1.3112736
- [4] Chenault CF, Beran PS. (1998) K- $\epsilon$  and Reynolds stress turbulence model comparisons for two-dimensional injection flows, *AIAA J*, 36:1401-1412. DOI: 10.2514/2.561
- [5] Borovoy V, Egorov I, Mosharov V, Radchenko V, Skuratov A, Struminskaya I. (2016) Entropy-layer influence on single-fin and double-fin/boundary-layer interactions, *AIAA J*, 54: 443-457. DOI: 10.2514/1.J053656
- [6] Borovoy V.Ya., Egorov I.V., Mosharov V.E., Radchenko V.N., Skuratov A.S., Struminskaya I.V. (2014) Shock waves/turbulent boundary layer interference near a fin and a pair of fins at the presence of entropy layer. Proceedings of International Conference on Methods of Aerophysical Research, Novosibirsk, Russia. P. 1-9.
- [7] Beketaeva A, Bruel P, Naimanova A. (2015) Vortical structures behind a transverse jet in a super-sonic flow at high jet to crossflow pressure ratios, *J Appl Mech Tech Phy*, 56:777-788. DOI: 10.1134/S0021894415050041
- [8] Dickmann DA, Lu FK. (2008) Shock/Boundary Layer Interaction Effects on Transverse Jets in Crossflow Over a Flat Plate. Proceedings of 38th Fluid Dynamics Conference and Exhibit, Seattle, USA. Paper AIAA 2008-3723
- [9] Лойцянский ЛГ (2003) *Механика жидкостей и газа*, седьмое издание. М.: Дрофа, Россия. ISBN: 5-7107-6327-6
- [10] Poinot TJ, Lele SK. (1992) Boundary conditions for direct simulation of compressible viscous flows, *J Comput Phys*, 101:104-129. DOI: 10.1016/0021-9991(92)90046-2
- [11] Бруель П, Найманова А. (2010) Расчет нормального вдува струи водорода в сверхзвуковом потоке воздуха, *Теплофизика и аэромеханика*, 17:565-546.
- [12] Моисеева ЕС, Найманова АЖ. (2014) Сверхзвуковое течение многокомпонентной газовой смеси с вдувом струи, *Вычислительные технологии*, 19: 51-66.
- [13] Rogers RC (1971) A study of the mixing of hydrogen injected normal to a supersonic airstream. NASA, Washington, United States, Report TN D-6114.
- [14] Шлихтинг Г (1974) *Теория пограничного слоя*. М.: Наука.
- [15] Gao ZX, Lee CH. (2011) Numerical research on mixing characteristics of different injection schemes for supersonic transverse jet, *Science China Technological Sciences*, 54:883-893. DOI: 10.1007/s11431-010-4277-9
- [16] Henry JR, Andrews EH, Jr., Pinckney SZ, McClinton CR., (1968) Boundary layer and starting problems on a short axisymmetric scramjet inlet, *Compressible Turbulent Boundary Layers*, 481-508, NASA SP-216.

#### REFERENCES

- [1] Gruber MR, Nejad AS, Chen TH, Dutton JC. (2000) Transverse injection from circular and elliptic nozzles into a supersonic crossflow, *J Propul Power*, 16:449-457. DOI: 10.2514/2.5609.
- [2] Erdem E, Kontis K. (2010) Numerical and experimental investigation of transverse injection flows, *Shock Waves*, 20:103-118. DOI: 10.1007/s00193-010-0247-1.
- [3] Viti V, Neel R, Schetz J. (2009) Detailed flow physics of the supersonic jet interaction flow field, *Phys Fluids*, 21:1-16. DOI: 10.1063/1.3112736.
- [4] Chenault CF, Beran PS. (1998) K- $\epsilon$  and Reynolds stress turbulence model comparisons for two-dimensional injection flows, *AIAA J*, 36:1401-1412. DOI: 10.2514/2.561.
- [5] Borovoy V, Egorov I, Mosharov V, Radchenko V, Skuratov A, Struminskaya I. (2016) Entropy-layer influence on single-fin and double-fin/boundary-layer interactions, *AIAA J*, 54: 443-457. DOI: 10.2514/1.J053656 .
- [6] Borovoy V.Ya., Egorov I.V., Mosharov V.E., Radchenko V.N., Skuratov A.S., Struminskaya I.V. (2014) Shock waves/turbulent boundary layer interference near a fin and a pair of fins at the presence of entropy layer. Proceedings of International Conference on Methods of Aerophysical Research, Novosibirsk, Russia. P. 1-9.
- [7] Beketaeva A, Bruel P, Naimanova A. (2015) Vortical structures behind a transverse jet in a super-sonic flow at high jet to crossflow pressure ratios, *J Appl Mech Tech Phy*, 56:777-788. DOI: 10.1134/S0021894415050041.
- [8] Dickmann DA, Lu FK. (2008) Shock/Boundary Layer Interaction Effects on Transverse Jets in Crossflow Over a Flat Plate. Proceedings of 38th Fluid Dynamics Conference and Exhibit, Seattle, USA. Paper AIAA 2008-3723.
- [9] Loitsyanskiy LG (1966) *Mechanics of liquids and gases*, second edition. Pergamon Press, Oxford, UK. ISBN: 9780080101255.
- [10] Poinot TJ, Lele SK. (1992) Boundary conditions for direct simulation of compressible viscous flows, *J Comput Phys*,

101:104-129. DOI: 10.1016/0021-9991(92)90046-2.

[11]Bruel P, Naimanova A. (2010) Computation of the normal injection of a hydrogen jet into a supersonic air flow, *Thermophys Aeromech*, 17:531-542. DOI: 10.1134/S0869864310040050.

[12]Moisseeva Ye, Naimanova A. (2014) Supersonic flow of multicomponent gaseous mixture with jet injection, *Computational Technologies*, 19:51-66. (In Russian).

[13]Rogers RC (1971) A study of the mixing of hydrogen injected normal to a supersonic airstream. NASA, Washington, United States, Rep. TN D-6114.

[14]Schlichting H (2000) *Boundary-layer theory*, eighth edition. Springer, Germany. ISBN: 3540662707.

[15]Gao ZX, Lee CH. (2011) Numerical research on mixing characteristics of different injection schemes for supersonic transverse jet, *Science China Technological Sciences*, 54:883-893. DOI: 10.1007/s11431-010-4277-9.

[16]Henry JR, Andrews EH, Jr., Pinckney SZ, McClinton CR., (1968) Boundary layer and starting problems on a short axisymmetric scramjet inlet, *Compressible Turbulent Boundary Layers*, 481-508. NASA SP-216

**Е.С. Моисеева<sup>1</sup>, А.Ж. Найманова<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық Университеті, Алматы, Қазақстан

<sup>2</sup>Математика және математикалық модельдеу институты ҚР БҒМ, Алматы, Қазақстан

### **КӨЛДЕНЕҢ ҮРЛЕНЕТІН АҒЫНША МЕН ЖЫЛДАМДЫҒЫ ДЫБЫС ЖЫЛДАМДЫҒЫНАН ЖОҒАРЫ АҒЫСПЕН ӘСЕРЛЕСУ МЕХАНИЗМДЕРІНЕ КІРЕ БЕРІСТЕГІ ШЕКАРАЛЫҚ ҚАБАТТЫҢ ӘСЕРІ**

**Андатпа.** Мәлім жұмыста көлденең үрленетін ағыншасы бар жылдамдығы дыбыс жылдамдығынан жоғары көпкомпонентті газ қоспалары сандық зерттелді. Кіре берісте шекаралық қабаттың құйындар жүйесі мен араласу қабаттарына әсері зерделенді. Ағыншаның алдында пайда болатын қосымша үзілмелі көпжүйелі ортаның аймағында шекаралық қабаттың қалыңдығының мәні анықталды, ағыншаның алдында жаңа құйындар жүйесі табылды. Шекаралық қабаттың қалыңдығы кішірейген сайын ағыншаның алдындағы кіре берістегі құйындар саны азаятындығы, ал ағыншаның артында қосымша құйындар жүйесі пайда болатындығы көрсетілді. Ағын мен үрленетін ағыншаның араласу процесіне құйындар жүйесінің әсері анықталды.

**Тірек сөздер:** турбуленттілік, шекаралық қабат, араласу қабаты, жылдамдығы дыбыс жылдамдығынан жоғары ағын, көлденең үрлеу.

## NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN  
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 6, Number 316 (2017), 163 – 167

**A.T.Akhmediyarova, O.Mamyrbayev**

Institute of information and computing technologies of the Ministry of Education  
and Science (MES) of the Republic of Kazakhstan, Almaty, Kazakhstan

E-mail: [aat.78@mail.ru](mailto:aat.78@mail.ru), [orken@ipic.kz](mailto:orken@ipic.kz)

**MODELING OF TRANSPORT SYSTEM  
WITH THE HELP OF PETRI NET**

**Abstract.** The problem of modeling urban traffic of transport is considered. Petri nets were chosen as the modeling tool, a classic tool for low-level modeling of distributed systems. Petri net is a compact, formal and graphical language with built-in parallelism. Therefore, it is very convenient for modeling transport systems. The analysis of modeling and traffic control methods through the intersection is carried out. The capacity of Petri nets was determined. The modeling of intersections and a block intersection with the use of odd logic in traffic light control is considered. A special approach is proposed for simulating the dynamics of the transport flow. According to the given geographic data, a colored Petri net with natural limitations is pre-constructed, which facilitates the simplification of the model. The parameters of this network are read relatively simple by the program from the configuration file. The principles embodied in the model allow us to scale it to an arbitrary number of intersecting intersections. The results of comparison of automatic controllers based on odd logic showed a gain in the time of passing cars by the intersection in comparison with conventional methods.

**Keywords:** transport system, net of Petri, graphs, multigraph, oriented multigraph.

**A.T.Ахмедиярова, О.Ж. Мамырбаев**

ҚР БҒМ «Ақпараттық және есептеуіш технологиялар институты», Алматы, Қазақстан

**ПЕТРИ ЖЕЛІСІМЕН ҚАЛАЛЫҚ  
ЖОЛ КӨЛІГІ ҚОЗҒАЛЫСЫН МОДЕЛЬДЕУ**

**Аннотация.** Қалалық жол көлігі қозғалысын модельдеу есебі қарастырылған. Таратылған жүйелердегі төменгі деңгейдегі классикалық құрылғының моделдеу құралы ретінде Петри желісі алынған. Петри желісі ықшам, ресми және графикалық. Сондықтан, ол көлік жүйелерін модельдеу үшін өте ыңғайлы. Қалалық жол көлігі қозғалысын моделдеу әдістеріне талдау жасалған. Петри желесінің өткізу қабілеттілігі анықталған. Бағдаршамды басқару кезінде анық емес логиканы пайдалану арқылы жолайрығын модельдеу қарастырылды. Көлік ағыны қозғалысын модельдеу үшін арнайы тәсіл ұсынылды. Ұсынылған тәсіл бойынша берілген географиялық деректерге сәйкес, модельді жеңілдетуге көмектесетін табиғи шектеулері бар Петри желісі алдын-ала құрылады. Желі параметрлері конфигурациялық файлдан бағдарлама бойынша салыстырмалы түрде оңай оқылады. Модельде келтірілген қағидалар оны жолайрықтарының ерікті санына теңестіруге мүмкіндік береді. Анық емес логикаға негізделген автоматы контроллерлерді салыстыру нәтижелері қарапайым әдістерге қарағанда жолайрығын көліктердің кесіп өту уақытының ұтымды нәтижесін көрсетті.

**Тірек сөздер:** көліктік жүйелер, Петри желісі, графтар, бағытталған мультиграф.

Петри желісі өзара доғалармен байланысқан позициялар мен ауысу төбелерінен тұратын екі жақты бағдарланған мультиграф. Бірдей типті төбелерді тікелей қосуға болмайды. Желімен жылжи алатын белгілер(маркерлер) позицияларға орналастырылуы мүмкін. Оқиға дегеніміз осы өтпелі кезеңнің кіріс позицияларының белгілерінің шығыс позицияларына жылжуы. Оқиғалар белгілі бір жағдайларда бірден немесе әр түрлі уақытта болады [1-4].

Бірнеше доғаның графтың бір төбесінен екіншісіне баруға мүмкіндік беретіндіктен, Петри желісі мультиграф болып табылады. Доғалар бағытталған болғандықтан, бұл бағдарланған мультиграф болып табылады. Графтың төбелерін екі топқа (позициялар мен ауысулар) бөлуге болады,

доғалардың әрқайсысы бір жиынның элементінен (позициялар немесе ауысулар) басқа жиынның элементіне (ауысулар немесе позициялар) бағытталуы тиіс; сондықтан, мұндай граф екі жақты бағдарланған мультиграф болып табылады.

Петри желісін көлік жүйелерін модельдеуде қолданудың бірнеше себептері бар [5]:

- олардың көлік желілерін дәл түсіндіруге мүмкіндік беретін нақты математикалық семантикасы бар;

- Петри желілерінің параллельді парадигмасы нақты параллельді көлік желілеріне өте ыңғайлы;

- Петри желілерін пайдаланатын көлік желісінің компоненттерінің үлгілерінің графикалық көрінісі математикалық пәндер бойынша мамандар емес сарапшыларды жұмысқа тартуға мүмкіндік береді.

Петри желісін графикалық көрінісі, нақты математикалық тілі және осы жүйенің өзгерісін талдау әдістері бар параллельді процесі жүйенің үлгісі ретінде қарастыруға болады.

Жалпы тұрғыдан, бұл модель позициялар, ауысулар, қырлар және графта орналастырылған белгілерден тұрады. Позициялар мен ауысулар графтардың төбелерінің түрлері болып табылады. Бағытталған қырлар позицияларды ауысулармен және керісінше байланыстырады, сонымен қатар бір типті төбелер бір-бірімен жалғастырыла алмайды. Белгілер позицияларда орналастырылған. Позицияларға белгілерді қосу және жою желінің динамикалық өзгерісін білдіреді. Бұл жағдай позициялардың қосылуы кезінде ауысуларға әкеліп соқтырады және бағдарланған қырларда белгіленген шарттарға сәйкес белгілерді қосады және жояды [6-7].

Негізгі модель неғұрлым күрделі формаларға дами алады. Осылайша, уақыт шкаласын қосу арқылы таймері бар Петри желілерін алуға; оқиғалардың ықтималдығын қосу арқылы стохастикалық Петри желісін алуға болады. Петри желісіндегі белгілер одан әрі мамандандырылған кезде мәндері бойынша өзгере бастайды. Осындай Петри желісінің бірі бояғышы бар Петри желісі болып табылады [3].

Модельдеу процесінде Петри желісі түріндегі модель құру алдында модельдеу мақсатын және нақты жүйеден абстракциялау деңгейін (модельде қандай элементтер және қандай сілтемелер көрсетілуі тиіс екендігі) анықтау өте маңызды болып табылады.

Модельдерді жасау кезіндегі негізгі мақсаттар:

- нақты жүйенің сипаттамасы,

- нақты жүйеде орындау оңай емес әртүрлі жағдайларды модельдеу арқылы нақты жүйенің өзгеруіне ұқсастыру,

- бұғаттауларға (тұйықталу) байланысты жүйенің өзгерісін талдау ,

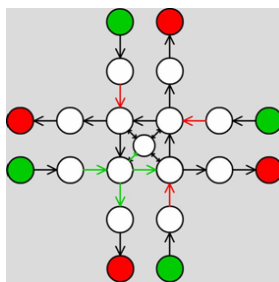
- жүйенің өзгеруі туралы статистикалық нәтижелерді алу.

Петри желісі ықшам, ресми және графикалық болғандықтан, көлік жүйелерін модельдеу үшін өте ыңғайлы.

Желі тораптарының рөлін бір машинаны орналастыруға болатын жолдың бөліктері атқарады. Машиналар Петри желілік текшелерімен модельденеді. Түрлі түсті текшелер олардың әр түрлі бағыттарын көрсетеді. Маңызды шектеулер: әрбір төбеде бір уақытта бірден артық текше болуы мүмкін, себебі бір уақытта жолдың кез-келген бөлігінде бірден артық машина болмауы керек. Бұл желінің «қауіпсіздік» қасиеті деп аталады [3-4].

Петри желісінің төбелері желінің бір торабынан екіншісіне өту шарттары бойынша беріледі. Өтуге рұқсат беру бағдаршам сигналына байланысты. Жолдың бір бөлігінен екіншісіне өту белгілі бір уақытта жүзеге асатындықтан, сәйкес доғаның өту уақытына тең кешігуі болады. Демек, бұл желі уақытша.

Бағдаршам - боялмаған Петри желісі [3]. Оның жалғыз текшесі бағдаршамның ағымдағы қалпын көрсетеді, бағдаршам желісінің төбелері жол желісінің кейбір төбелерімен байланысты. Текше бағдаршамның келесі төбесіне ауысқан кезде оның жағдайы өзгереді - жол желісінің бір торабынан өту бұғатталады, екіншісіне рұқсат етіледі. Ауысу бірден емес, бірақ біраз уақыттан кейін жүзеге асатындықтан, бағдаршам желісі де уақытша болып табылады. Бұл модельдегі бағдаршам жолайрығына кіруге бағытталған көлік ағыны өтетін жол тораптарын ғана бұғаттайды, бірақ 1-суретте көрсетілгендей көлік құралдарын жолайрықтан шығаратын тораптарды бұғаттамайды.



1-сурет. Төрт біржолақты жолдардың қиылысындағы модель

Боялған уақытша Петри желісінің толық математикалық сипаттамасы бір жолайрығы мысалында [4] әдебиетте келтірілген. Петри ерікті желілерін модельдеу және талдауға арналған бағдарламалық құралдар бар, мысалы [3]. Бірақ олар әмбебап болғандықтан, интерфейсі күрделі.

Көлік ағыны қозғалысын модельдеу үшін келесі тәсіл ұсынылады: берілген географиялық деректерге сәйкес, модельді жеңілдетуге көмектесетін табиғи шектеулері бар Петри желісі алдынала құрылады. Бұл желінің параметрлері конфигурациялық файлдан бағдарлама бойынша салыстырмалы түрде оңай оқылады. Модельде келтірілген қағидалар оны бірінен соң бірі қиылысатын жолайрықтарының ерікті санына теңестіруге мүмкіндік береді.

Жол желісі объектілердің екі классы: жолдар мен қиылыстар [5-9]. Жол сол және оң жолақтардан тұрады. Жолақ дегеніміз машина орналастырылуы мүмкін бір-бірімен тығыз байланысты жерлердің саны. Көптеген көліктер өлшемі 3 те 6 метр тіктөртбұрышқа сияды. Ұзын автобустар мен жүк автомобильдері осы өлшемдегі 2 немесе 3 тіктөртбұрышты алады. Қозғалыстың орташа жылдамдығы 40 км/сағ болса, уақыт бойынша дискреттеу қадамын 0,25 секунд деп таңдау жеткілікті. Жолақтың басында машиналарды шығаратын және жоятын арнайы тораптар болуы мүмкін, мұндай тораптар шеттік тораптар деп аталады. 1-суретте жасалынатын шеттік тораптар жасыл түспен, жойылатындары қызыл түспен белгіленген.

Жолайрығы - екі, үш немесе төрт жолды қосатын бірнеше тораптар. Бұл тораптар жолайрықтан шығатын жолайрыққа бағытталған әрбір жолақтың қолжетімділігін қамтамасыз етеді. Жол желісін салғаннан кейін машиналардың түрлеріне белгілер түстері тағайындалады. Машинаның түрі оның бағытымен анықталады. Әрбір түр жолдың бір шеттік торабынан (шығаратын) келесісіне (жоятын) дейін ең қысқа жол бағытына сәйкес келеді [10].

Әрбір өндіруші шеттік торапта берілген торапта жасалатын машина түрлерінің жиынтығын орташа тарату уақыты жиынтығына сәйкестендіріп генерациялау жоспары құрылады. Симуляция барысында белгіленген уақыт өткен сайын торапта осы түрдегі машина жасалады. Сондай-ақ, осы торапта машина пайда болатын уақыт ауқымын орнатуға болады.

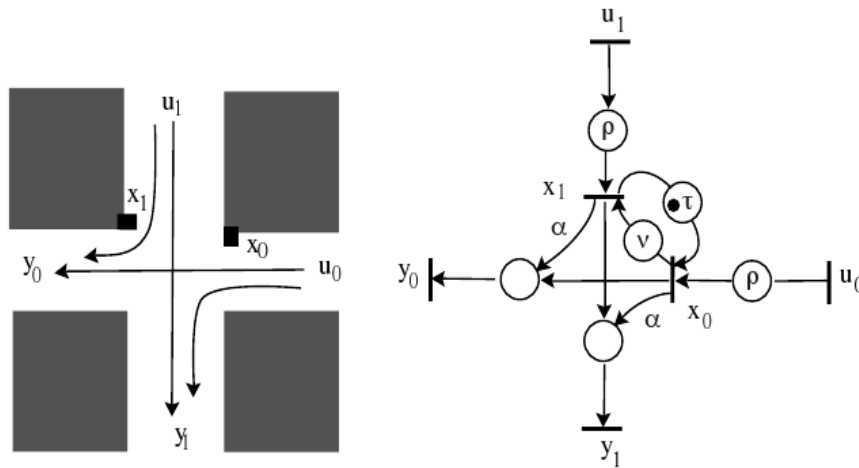
Бағдарламалау кезінде шеттік өндіруші тораптардың уақыт ауқымы, бағдарламаш режимі жұмысының уақыт ауқымы және әрбір режим үшін жолайрығы қиылысында рұқсат етілген бағытты берілген жүктемеде жол желісі қалай жұмыс жасайтындығын неғұрлым егжей-тегжейлі талдау үшін өзгертуге болады. Модельдеу процесін әртүрлі учаскелерде көліктердің көптігін бағалау үшін тоқтатуға және шеттік тораптар мен бағдарламаштарға сәйкес мәндерді өзгертуге болады [11].

Жүйеде машинаның болу уақытын азайту үшін «жасыл толқындарды» жасайды. Егер цикл уақыты дұрыс таңдалса, онда жасыл толқындарының сәйкес төрт жүйесін үйлестіргенде автокөлік қаланың бір нүктесінен екінші нүктесіне дейін белгілі бір жылдамдықпен бағдарламашның тек бір ғана қызыл түсіне тоқтауы мүмкін. Бұл нәтиже барлық көшелердегі көлік ағындары машиналардың виртуалды ағынынан аз болғанда ғана жарамды. Бұған көшенің әрбір бөлігіндегі жылдамдықты әрбір блоктың өтуі үшін қажетті уақыт бір қалыпта қалатындай етіп бейімдеу арқылы қол жеткізуге болады [12].

Алдымен машиналарды виртуалды деп қарастыру керек. Виртуалды көліктер мінсіз үйлестіруді зерттеуде пайдалы. Нақты машиналардың ағындары виртуалды машиналардың ағындарына қарағанда көп болмауы керек.

*Жолайрығын модельдеу.*

Жолайрығымен байланысты Петри желісі 2-суретте келтірілген [12].  $x_0(t)$  және  $x_1(t)$  арқылы  $t$  уақыт аралығында екі бағдарламашның әрқайсысында болатын жасыл фазаның жалпы санын белгілейік. Екі бағдарламашның әрқайсысында болатын жасыл фазаның ұзақтығы сәйкесінше  $\tau$  и  $\nu$ .



2-сурет - Жолайрығындағы Петри желісі

Жолайрығынан өтуге болатын автомобильдердің саны тиісті жасыл фаза ұзақтығына сәйкес келетін коэффициентке шамалас деп есептейміз. Әрбір жолайрығында мәні  $a$ -ға тең көлік құралдарының үлесі тек бір бағытқа ғана бұрылады деп жобаланады.  $u_0(t)$  және  $u_1(t)$  арқылы  $t$  уақытқа дейін жолайрығына келген жеңіл көліктердің жалпы санын, ал  $y_0(t)$  және  $y_1(t)$  арқылы  $t$  уақытқа дейін жолайрығынан өткен жеңіл көліктердің жалпы санын белгілейік.

Енетін  $u$  және шығатын  $y$  өзара қатынасы стохастикалық динамикалық бағдарламалау теңдеуін береді, мұндағы  $x$  Беллман функциясы:

$$x = a \otimes x \oplus b \otimes u, \quad y = cx, \tag{1}$$

мұндағы

$$a = \begin{bmatrix} \varepsilon & \gamma\delta^\tau \\ \delta^\nu & \varepsilon \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} \delta^\rho/\nu & \varepsilon \\ \varepsilon & \delta^\rho/\tau \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} (1-\alpha)\nu & \alpha\tau \\ \alpha\tau & (1-\alpha)\tau \end{bmatrix},$$

$\oplus$  - матрицалардың minplus қосындысы,  $\otimes$  - матрицалардың minplus көбейтіндісі (кәдімгі матрицаны көбейту кезінде қосымша қосу арқылы ең аз мөлшерді ауыстыру және көбейту,  $\varepsilon = \infty, e = 0$ ),  $\delta$ - ( $\delta v(t) = v(t-1)$ ) уақытындағы ауысу және  $\gamma$  - ( $\gamma v(t) = 1 + v(t)$ ) уақытындағы ауысу.

Осы белгілеулерді қолдану арқылы (1) теңдеуден алатынымыз:

$$x_0(t) = \min\{1 + x_1(t - \tau), u(t - \rho)/\nu\}, \quad y_0(t) = (1 - \alpha)\nu x_0(t) + \alpha\tau x_1(t).$$

Матрицалардың көбейтіндісі  $y = cx$  стандарты екендігіне назар аударған дұрыс.

Әлбетте бұл теңдеулер (1) динамикалық бағдарламалау теңдеулеріне де, minplus алгебрасында да, стандарты жағдайда да сызықты емес. minplus матрицалық көбейтуді қолдану векторлық теңдеулерді жазу кезінде ғана ыңғайлы және ықшам.

**Тұжырымдар:**

1. Қалалық жол көлігі қозғалысын моделдеу әдістеріне талдау жасалды;
2. Петри желесінің өткізу қабілеттілігі анықталды;
3. Бағдаршамды басқару кезінде анық емес логиканы пайдалану арқылы жолайрығын модельдеу қарастырылды. Анық емес логикаға негізделген автоматы контроллерлерді салыстыру нәтижелері қарапайым әдістерге қарағанда жолайрығын көліктердің кесіп өту уақытының ұтымды нәтижесін көрсетті.

**ӘДЕБИЕТ**

[1] Швецов В.И. Математическое моделирование транспортных потоков // Институт системного анализа РАН, Москва, 2003 г. - 52 с.

- [2] Лобанов А.И. Модели клеточных автоматов // Московский физико-технический институт, 2010 г. URL: [http://crm.ics.org.ru/uploads/crmissues/kim\\_2010\\_2\\_3/crm10304.pdf](http://crm.ics.org.ru/uploads/crmissues/kim_2010_2_3/crm10304.pdf).
- [3] Кинько В.М., Бесценный И.П. Моделирование транспортных сетей с помощью раскрашенных взвешенных сетей Петри. // Математические структуры и моделирование – 2013. - №1. – С.56-62.
- [4] Mariagrazia Dotoli, Maria Pia Fanti. An urban traffic network model via coloured timed Petri nets. Dipartimento di Elettrotecnica ed Elettronica, Politecnico di Bari, 27 p. URL: [http://dee.poliba.it/labcontrolli/file\\_pdf/Wodes04.pdf](http://dee.poliba.it/labcontrolli/file_pdf/Wodes04.pdf).
- [5] Bellman R. On a Routing Problem // Quarterly of Applied Mathematics. - 1958. - Vol 16. - N.1. - С. 87–90.
- [6] The zlib/libpng License (Zlib) // Open Source Initiative. URL: <http://opensource.org/licenses/Zlib>.
- [7] Haaf's Game Engine - hardware accelerated 2d engine. URL: <http://hge.relishgames.com>.
- [8] Питерсон Дж. Теория сетей Петри и моделирование систем. - М: Мир, 1994. - 264 с.
- [9] Котов В. Е. Сети Петри. - М: Наука, 1994. - 160 с.
- [10] Слепцов А. И., Юрасов А. А. Автоматизация проектирования управляющих систем гибких автоматизированных производств. - Киев: Техніка, 1986. - 160 с.
- [11] Ачасова С.М., Бандман О.Л. Корректность параллельных вычислительных процессов. — Новосибирск: Наука, 1990. - 253 с.
- [12] Утепбергенев И.Т., Ахмедиярова А.Т., Касымова Д.Т. О задачи моделирования регулярного города с помощью сети Петри //Вестник КазАТК. - Алматы, 2016. - №1. 77–81 с.

#### REFERENCES

- [1] Shvetsov V.I. Matematicheskoye modelirovaniye transportnykh potokov // Institut sistemnogo analiza RAN, Moskva, 2003. 52 с.
- [2] Lobanov A.I. Modeli kletochnykh avtomatov // Moskovskiy fiziko-tekhnicheskij institut, 2010. URL: [http://crm.ics.org.ru/uploads/crmissues/kim\\_2010\\_2\\_3/crm10304.pdf](http://crm.ics.org.ru/uploads/crmissues/kim_2010_2_3/crm10304.pdf).
- [3] Kin'ko V.M., Bestsenyy I.P. Modelirovaniye transportnykh setey s pomoshch'yu raskrashennykh vzveshennykh setey Petri. // Matematicheskiye struktury i modelirovaniye. 2013. №1. S.56-62.
- [4] Mariagrazia Dotoli, Maria Pia Fanti. An urban traffic network model via coloured timed Petri nets. Dipartimento di Elettrotecnica ed Elettronica, Politecnico di Bari, 27 p. URL: [http://dee.poliba.it/labcontrolli/file\\_pdf/Wodes04.pdf](http://dee.poliba.it/labcontrolli/file_pdf/Wodes04.pdf).
- [5] Bellman R. On a Routing Problem // Quarterly of Applied Mathematics. 1958. Vol 16. N.1. С. 87–90.
- [6] The zlib/libpng License - hardware accelerated 2d engine. URL: <http://hge.relishgames.com>.
- [8] Piterson Dzh. Teoriya setey Petri i modelirovaniye sistem. M: Mir, 1994. 264 s.
- [9] Kotov V. Ye. Seti Petri. M: Nauka, 1994. 160 s.
- [10] Sleptsov A. I., Yurasov A. A. Avtomatizatsiya proyektirovaniya upravlyayushchikh sistem gibkikh avtomatizirovannykh proizvodstv. Kiyev: Tekhnika, 1986. 160 s.
- [11] Achasova S.M., Bandman O.L. Korrektnost' parallel'nykh vychislitel'nykh protsessov. Novosibirsk: Nauka, 1990. 253 s.
- [12] Utepbergenov I.T., Akhmediyarova A.T., Kasymova D.T. O zadachi modelirovaniya regul'yarnogo goroda s pomoshch'yu seti Petri //Vestnik KazATK. Almaty, 2016. №1. 77–81.

УДК 004.021

**А.Т.Ахмедиярова, О.Ж.Мамырбаев**

«Институт информационных и вычислительных технологий» КН МОН РК, Алматы, Казахстан

#### МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРАНСПОРТНЫХ СИСТЕМ ГОРОДА С ПОМОЩЬЮ СЕТЕЙ ПЕТРИ

**Аннотация.** Рассматривается задача моделирования городского дорожного движения транспорта. Инструментом моделирования были выбраны сети Петри — классическое средство низкоуровневого моделирования распределенных систем. Сеть Петри это компактный, формальный и графический язык со встроенной параллельностью. Поэтому он очень удобен для моделирования транспортных систем. Проведен анализ методов моделирования и управления движением транспорта через перекресток. Определена пропускная способность сетей Петри. Рассмотрено моделирование перекрестков и блока перекрестков с использованием нечетной логики в управлении светофором. Предлагается специальный подход к имитационному моделированию динамики транспортного потока. По заданным географическим данным заранее строится раскрашенная сеть Петри с естественными ограничениями, которые способствуют упрощению модели. Параметры этой сети считываются относительно простой программой из файла конфигурации. Заложенные в модель принципы позволяют масштабировать её на произвольное число идущих друг за другом перекрестков. Результаты сравнения автоматических контролеров, основанных на нечетной логике, показали выигрыш во времени прохождения автомобилями перекрестка по сравнению с обычными методами.

**Ключевые слова:** транспортные системы, сеть Петри, графы, мультиграф, ориентированный мультиграф.

МАЗМҰНЫ

<i>Асанова А.Т.</i> Сынықтар әдісінің жүктелген және интегралдық-дифференциалдық параболалық теңдеулер үшін периодты есепті шешуге қолданылуы .....	5
<i>Сергазина А.М., Есмаханова Қ.Р., Ержанов К.К., Тунгушбаева Д.И.</i> (1+1)-өлшемді локалды емес фокусталған сызықты емес шредингер теңдеуі үшін дарбу түрлендіруі.....	14
<b>Боос Э.Г.</b> , <i>Темиралиев Т.*</i> , <i>Избасаров М., Самойлов В.В., Покровский Н.С., Турсунов Р.А.</i> Импульсі 32 ГЭВ/С антипротон-протондық аннигиляциялық реакциясында екінші реттік зарядталған бөлшектердің бұрыштық корреляциясы.....	22
<i>Бошқаев Қ.А., Жәми Б.А., Қалымова Ж.А., Бришева Ж.Н.</i> Шекті температуралар мен жалпы салыстырмалық теориясының әсерлерін ескергендегі статикалық ақ ергежейлі жұлдыздар.....	27
<i>Мурзахметов А.Н., Федотов А.М., Гришко М.В., Дюсембаев А.Е.</i> Әлеуметтік-экономикалық қоғамдарда инновацияның таралуын модельдеу.....	39
<i>Оразбаев С.А., Рамазанов Т.С., Досболаев М.Қ., Габдуллин М.Т., Өмірбеков Д.Б.</i> Жоғары жиілікті разряд плазмасында супергидрофобты беттер алу әдісі.....	45
<i>Сарсенбаев Х.А., Хамзина Б.С., Колдасова Г.А., Исаева Г.Б.</i> Ұңғымаларды игеру кезінде ұңғымаларды шаюдағы отандық және шетелдік технологияларды қолдану ерекшеліктері .....	52
<i>Қабылбеков К.А., Омишова Г.Ш.</i> MATLAB жүйесін қолданып жылу тасымалдауды зерттеуге арналған зертханалық жұмыстарды орындауды ұйымдастыру.....	56
<i>Исадыков А.Н., Иванов М.А., Нурбакова Г.С., Сәйдүллаева Г.Г., Рустембаева С.Б.</i> В–S ауысуының формфакторларын есептеу .....	67
<i>Нурбакова Г.С., Хабыл Н., Валиолда Д.С., Тюлемисов Ж.Ж.</i> $\Lambda_b \rightarrow \Lambda_c$ Ауысуы үшін формфакторлар.....	78
<i>Жақып-тегі К. Б.</i> Ойдан шығарылған аймақтар әдістемесінің гидродинамикадағы репрезентаттығы.....	85
<i>Мусрепова Э., Жидебаева А.Н., Шалданбаев А.Ш.</i> Сингуляр әсерленген, бірінші ретті теңдеудің, Кошилік есебін шешудің операторлық әдістері.....	96
<i>Исадыков А.Н., Иванов М.А., Нурбакова Г.С., Жаугашева С.А., Мұратхан Ж.</i> Кварктардың коварианттық моделінде $B_s \rightarrow \phi$ ауысуы.....	108
<i>Жақып-тегі К. Б.</i> «Дарси заңының» сүзгі теориясындағы компилятивтігі .....	115
<i>Глуценко Н.В., Горлачев И.Д., Желтов А.А., Киреев А.В., *Мұқашев Қ.М., Платов А.В.</i> УКП-2-1 үдеткішімен жүргізілетін физикалық эксперименттерді орындауды автоматтандыру.....	131
<i>Қабылбеков К.А., Омишова Г.Ш.</i> MATLAB жүйесін қолданып гидродинамикадан компьютерлік зертханалық жұмыстарды орындауды ұйымдастыру.....	139
<i>Байдуллаев С., Байдуллаев С.С.</i> Жердің тәулік дәуірлі электр тоқтары.....	146
<i>Моисеева Е.С., Найманова А.Ж.</i> Көлденең үрленетін ағынша мен жылдамдығы дыбыс жылдамдығынан жоғары ағыспен әсерлесу механизмдеріне кіре берістегі шекаралық қабаттың әсері.....	154
<i>Ахмедиярова А.Т., Мамырбаев О.Ж.</i> Петри желісімен қалалық жол көлігі қозғалысын модельдеу.....	163



## СОДЕРЖАНИЕ

<i>Асанова А.Т.</i> Применение метода ломаных к решению периодической задачи для нагруженного и интегро-дифференциального параболических уравнений .....	5
<i>Сергазина А.М., Есмаханова К.Р., Ержанов К.К., Тунгушбаева Д.И.</i> Преобразования Дарбу для (1+1)-мерного нелокального фокусированного нелинейного уравнения шредингера.....	14
<i>Боос Э.Г., Тамиралиев Т.*</i> , <i>Избасаров М., Жаутыков Б.О., Самойлов В.В., Покровский Н.С., Турсунов Р.А.</i> Угловые корреляции вторичных заряженных частиц в реакциях антипротон-протонной аннигиляции ПРИ 32 ГЭВ/С.....	22
<i>Бошкаев К.А., Жами Б.А., Калымова Ж.А., Бришева Ж.Н.</i> Статические белые карлики с учетом эффектов конечных температур и общей теории относительности.....	27
<i>Мурзахметов А.Н., Федотов А.М., Гришко М.В., Дюсембаев А.Е.</i> Моделирование распространения инновации в социально-экономических системах.....	39
<i>Оразбаев С.А., Рамазанов Т.С., Досболаев М.Қ., Габдуллин М.Т., Өмірбеков Д.Б.</i> Способ получения супергидрофобных поверхностей в плазме ВЧ разряда.....	45
<i>Сарсенбаев Х.А., Хамзина Б.С., Колдасова Г.А., Исаева Г.Б.</i> Особенности применения отечественных и зарубежных технологий промывки скважин при освоении скважин.....	52
<i>Кабылбеков К.А., Омашова Г.Ш.</i> Организация выполнения компьютерных лабораторных работ по исследованию теплопереноса с применением системы MATLAB.....	56
<i>Исадыков А.Н., Иванов М.А., Нурбакова Г.С., Сайдуллаева Г.Г., Рустембаева С.Б.</i> Вычисление формфакторов В-S перехода.....	67
<i>Нурбакова Г.С., Хабыл Н., Валиолда Д.С., Тюлемисов Ж.Ж.</i> Формфактор для перехода $\Lambda_b \rightarrow \Lambda_c$ .....	78
<i>Джакупов К.Б.</i> Репрезентативность метода фиктивных областей в гидродинамике.....	85
<i>Мусрепова Э., Жидебаева А.Н., Шалданбаев А.Ш.</i> Об операторных методах решения сингулярно возмущенной задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка с переменным коэффициентом.....	96
<i>Исадыков А.Н., Иванов М.А., Нурбакова Г.С., Жаугашева С.А., Муратхан Ж.</i> $V_s \rightarrow \phi$ переход в ковариантной модели кварков.....	108
<i>Джакупов К.Б.</i> Компилятивность “Закона Дарси” в теории фильтрации.....	115
<i>Глуценко Н.В., Горлачев И.Д., Желтов А.А., Киреев А.В., *Мукашев К.М., Платов А.В.</i> Автоматизация проведения физических экспериментов на ускорителе УСП-2-1.....	131
<i>Кабылбеков К.А., Омашова Г.Ш.</i> Организация выполнения компьютерных лабораторных работ по гидродинамике с применением системы MATLAB.....	139
<i>Байдуллаев С., Байдуллаев С. С.</i> Земные электрические токи с суточными периодами.....	146
<i>Моисеева Е.С., Найманова А.Ж.</i> Влияние толщины пограничного слоя на входе на механизмы взаимодействия сверхзвукового потока с поперечно дувимой струей.....	154
<i>Ахмедиярова А.Т., Мамырбаев О.Ж.</i> Моделирование транспортных систем города с помощью сетей Петри.....	163

CONTENTS

<i>Assanova A.T.</i> Application of polygonal method to solve of periodic problem for loaded and integro-differential parabolic equations .....	5
<i>Sergazina A., Yesmakhanova K., Yerzhanov K., Tungushbaeva D.</i> Darboux transformation for the (1+1)-dimensional nonlocal focusing nonlinear schrödinger equation.....	14
<i>Boos E., Temiraliyev T., Izbasarov M., Zhautykov B., Samoiloov V., Pokrovsky N., Tursunov R.</i> Angle correlations of secondary charged particles in the reactions of antiproton-proton annihilation at 32 GEV/S.....	22
<i>Boshkayev K.A., Zhami B.A., Kalymova Zh.A., Brisheva Zh.N.</i> Static white dwarfs taking into account the effects of finite temperatures and general relativity.....	27
<i>Murzakhmetov A.N., Fedotov A.M., Grishko M.B., Dyusembaev A.E.</i> Modeling of distribution of innovation in socio-economic systems.....	39
<i>Orazbayev S.A., Ramazanov T.S., Dosbolayev M.K., Gabdullin M.T., Omirbekov D.B.</i> The method of obtaining hydrophobic surfaces in the plasma of rf discharge.....	45
<i>Sarsenbayev Kh.A., Khamzina B.S., Koldassova G.A., Issayeva G.B.</i> Features of application of domestic and foreign technologies of washing of wells at development of wells .....	52
<i>Kabylbekov K. A., Omashova G. SH.</i> Organization of implementation of computer laboratory works for the study of heat transfer with the use of MATLAB system.....	56
<i>Issadykov A.N., Ivanov M.A., Nurbakova G.S., Saidullaeva G.G., Rustembayeva S.B.</i> Calculation of B-S transition form factors .....	67
<i>Nurbakova G.S., Habyln., Valiolda D.S., Tyulemissov Zh. Zh.</i> Form factors for $\Lambda_b \rightarrow \Lambda_c$ transition.....	78
<i>Jakupov K.B.</i> Representation of the method of the fiction areas in hydrodynamics.....	85
<i>Musrepova E., Zhidebaeva A.N., Shaldanbaeva A.Sh.</i> On operator methods for solving a singularly perturbed Cauchy problem for an ordinary differential equation of the first order with a variable coefficient.....	96
<i>Issadykov A.N., Ivanov M.A., Nurbakova G.S., Zhaugasheva S.A., Muratkhan Zh.</i> $B_s \rightarrow \phi$ Transition in covariant quark model.....	108
<i>Jakupov K.B.</i> Complicability of the "Darcy law" in the filtration theory.....	115
<i>Gluschenko N.V., Goralchev I.D., Zheltov A.A., Kireev A.V., Mukshev K.M., Platov A.V.</i> Automation of experimentation at Accelerator UKP-2-1 .....	131
<i>Kabylbekov K. A., Omashova G. SH.</i> Organization of implementation of computer laboratory works on hydrodynamics with application of MATLAB.....	139
<i>Baydullaev S., Baydullaev S. S.</i> Earth electric currents with diurnal periods.....	146
<i>Moisseyeva Ye., Naimanova A. E.</i> Effect of boundary layer thickness at inlet on patterns of interaction of supersonic flow with transverse injected jet.....	154
<i>Akhmediyarova A.T., Mamyrbayev O.</i> Modeling of transport system with the help of Petri net.....	163

---

**Publication Ethics and Publication Malpractice  
in the journals of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan**

For information on Ethics in publishing and Ethical guidelines for journal publication see <http://www.elsevier.com/publishingethics> and <http://www.elsevier.com/journal-authors/ethics>.

Submission of an article to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan implies that the described work has not been published previously (except in the form of an abstract or as part of a published lecture or academic thesis or as an electronic preprint, see <http://www.elsevier.com/postingpolicy>), that it is not under consideration for publication elsewhere, that its publication is approved by all authors and tacitly or explicitly by the responsible authorities where the work was carried out, and that, if accepted, it will not be published elsewhere in the same form, in English or in any other language, including electronically without the written consent of the copyright-holder. In particular, translations into English of papers already published in another language are not accepted.

No other forms of scientific misconduct are allowed, such as plagiarism, falsification, fraudulent data, incorrect interpretation of other works, incorrect citations, etc. The National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan follows the Code of Conduct of the Committee on Publication Ethics (COPE), and follows the COPE Flowcharts for Resolving Cases of Suspected Misconduct ([http://publicationethics.org/files/u2/New\\_Code.pdf](http://publicationethics.org/files/u2/New_Code.pdf)). To verify originality, your article may be checked by the Cross Check originality detection service <http://www.elsevier.com/editors/plagdetect>.

The authors are obliged to participate in peer review process and be ready to provide corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. All authors of a paper should have significantly contributed to the research.

The reviewers should provide objective judgments and should point out relevant published works which are not yet cited. Reviewed articles should be treated confidentially. The reviewers will be chosen in such a way that there is no conflict of interests with respect to the research, the authors and/or the research funders.

The editors have complete responsibility and authority to reject or accept a paper, and they will only accept a paper when reasonably certain. They will preserve anonymity of reviewers and promote publication of corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. The acceptance of a paper automatically implies the copyright transfer to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan.

The Editorial Board of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan will monitor and safeguard publishing ethics.

Правила оформления статьи для публикации в журнале смотреть на сайтах:

[www.nauka-nanrk.kz](http://www.nauka-nanrk.kz)

<http://www.physics-mathematics.kz>

**ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)**

Редакторы *М. С. Ахметова, Т.А. Апендиев*  
Верстка на компьютере *А.М. Кульгинбаевой*

Подписано в печать 20.12.2017.  
Формат 60x881/8. Бумага офсетная. Печать – ризограф.  
11,2 п.л. Тираж 300. Заказ 6.

---

---

*Национальная академия наук РК*  
*050010, Алматы, ул. Шевченко, 28, т. 272-13-18, 272-13-19*